



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



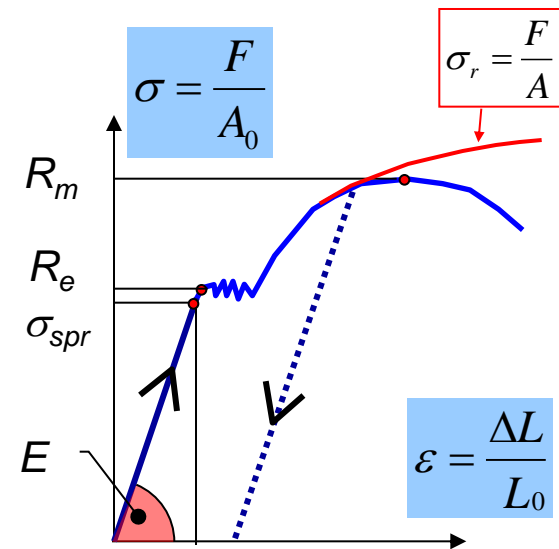
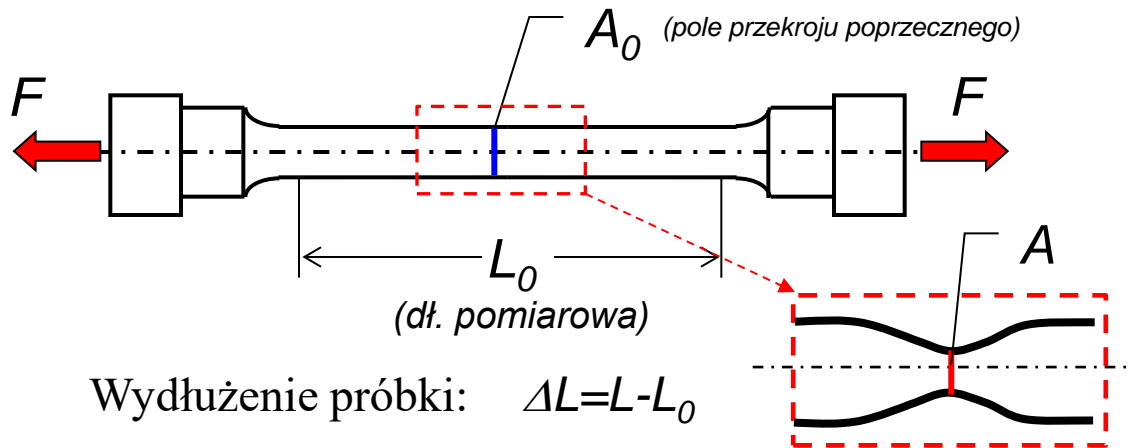
Metoda elementów skończonych (MES2)

Wykład 5. Nieliniowości materiałowe i kontaktu

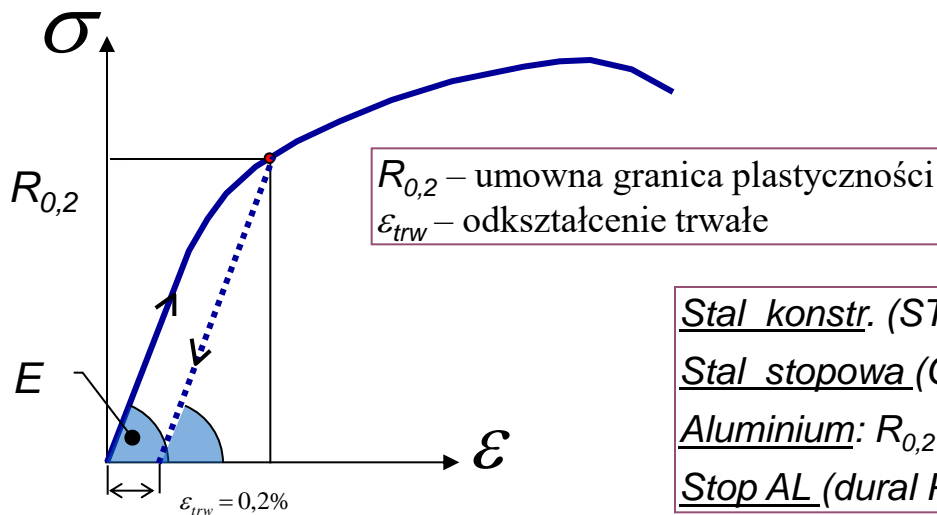
11.2024

Statyczna próba rozciągania

Próba rozciągania próbki wykonanej z materiału o wyraźnej granicy plastyczności:



Dla materiału bez wyraźnej granicy plastyczności:



E – moduł Younga
 σ_{spr} – granica sprężystości
 R_e – granica plastyczności
 R_m – granica wytrzymałości doraźnej

σ_r – naprężenia rzeczywiste
 A – rzeczywiste pole przekroju poprzecznego

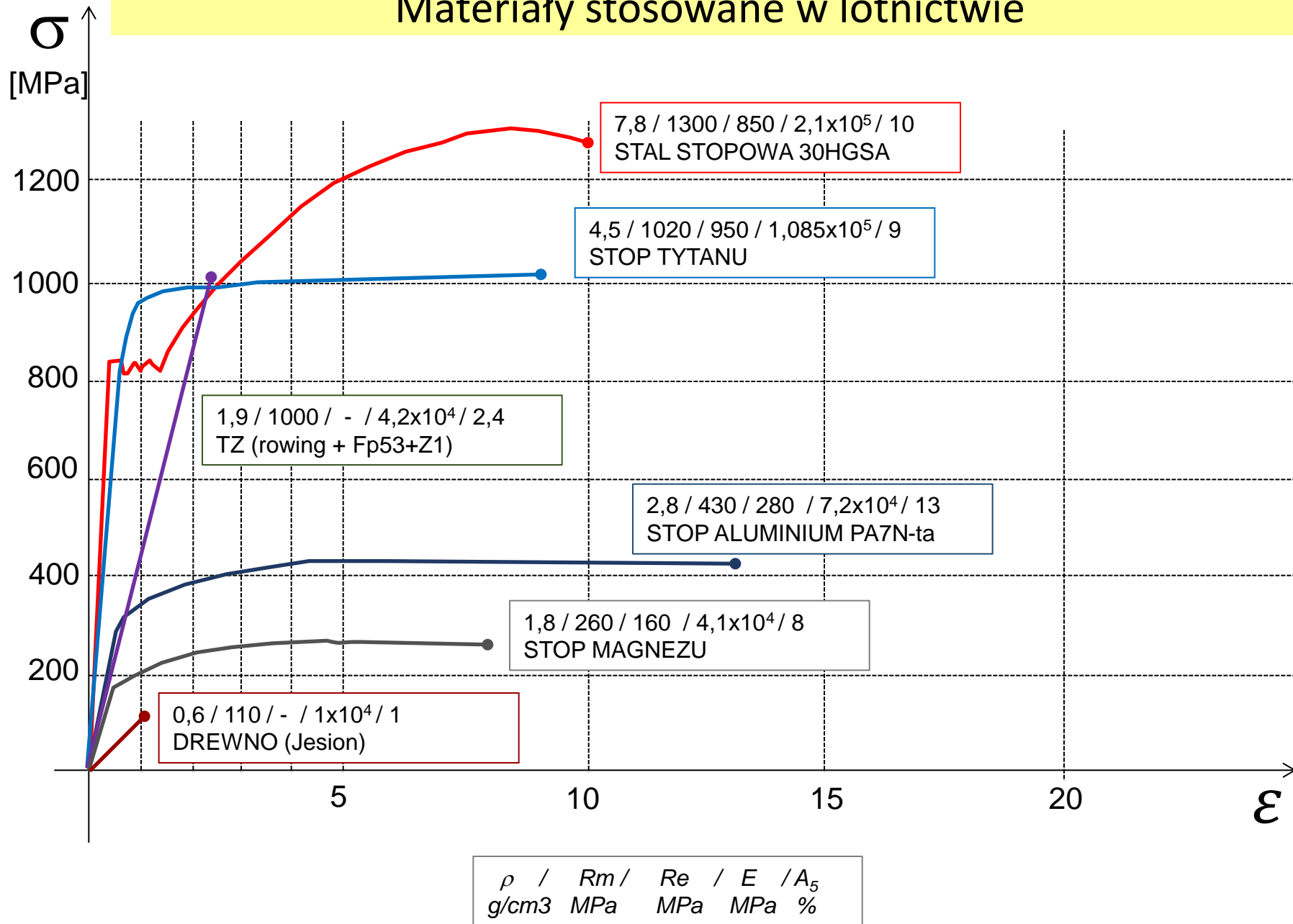
Stal konstr. (ST3S) : $R_e = 200$ MPa $R_m = 450$ MPa

Stal stopowa (Cr-Ni-Mo): $R_e = 870$ MPa $R_m = 1020$ MPa

Aluminium: $R_{0,2} = 120$ MPa $R_m = 140$ MPa

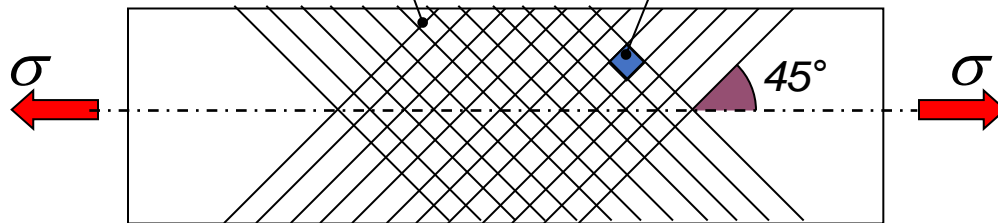
Stop AL (dural PA9): $R_{0,2} = 490$ $R_m = 570$ MPa

Materiały stosowane w lotnictwie



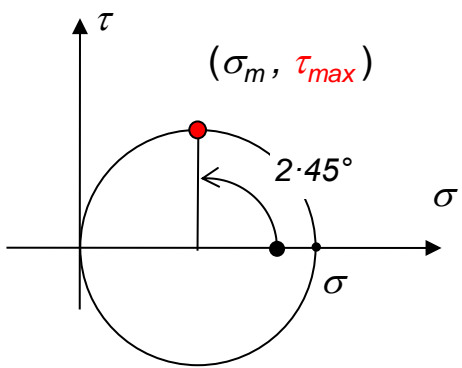
Hipoteza Coulomba - Treski

Linie Lüdersa Ziarna ślizgają się i wzajemnie blokują



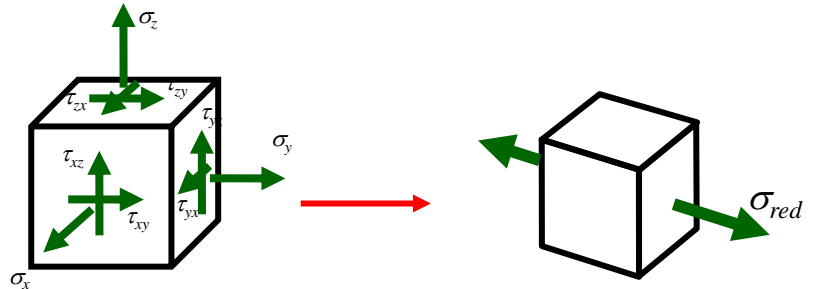
- ZJAWISKA:**
- Chaotyczne ustawienie ziaren
 - Granice ziaren blokują proces poślizgu
 - Poślizgi – odkształcenia niejednorodne
 - Kolejne ziarna ulegają uplastycznieniu (poddają się poślizgom)

Próbka z miękkiej stali o wyraźnej granicy plastyczności



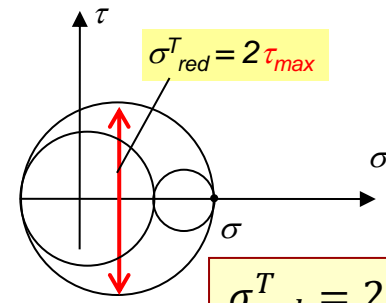
Całe odkształcenie powstaje na skutek poślizgu !

Hipoteza τ_{max} (Coulomba-Treski):
 Wartość τ_{max} stanowi miarę niebezpieczeństwa jaką przedstawia dany stan naprężenia z uwagi na pojawienie się pierwszych makroskopowych trwałych odkształceń

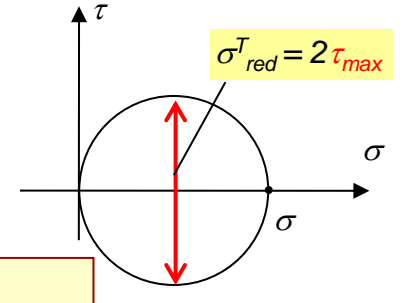


Dowolny stan naprężenia

Równoważny stan rozciągania

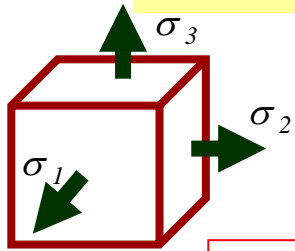


$$\sigma_{red}^T = 2 \cdot \tau_{max}$$



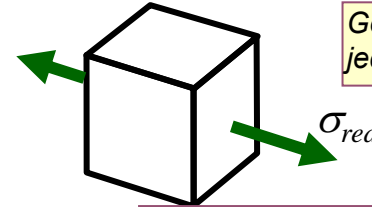
Naprężenia zredukowane, to zastępczy stan jednowymiarowy rozciągania, który pod względem bezpieczeństwa odpowiada stanowi analizowanemu

Hipoteza Hubera-Misesa- Hencky



Gęstość energii odkształcenia postaciowego dla stanu trójwymiarowego (energia właściwa)

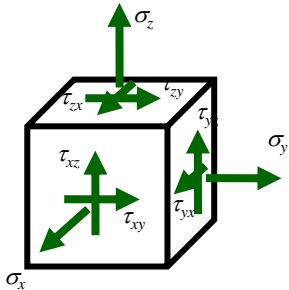
$$U' = \frac{1+\nu}{3E} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \right\}$$



Gęstość energii dla stanu jednowymiarowego rozciągania

$$U' = \frac{1+\nu}{3E} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left[(\sigma_{red})^2 + (\sigma_{red})^2 \right] \right\} = \frac{1+\nu}{3E} \cdot \sigma_{red}^2$$

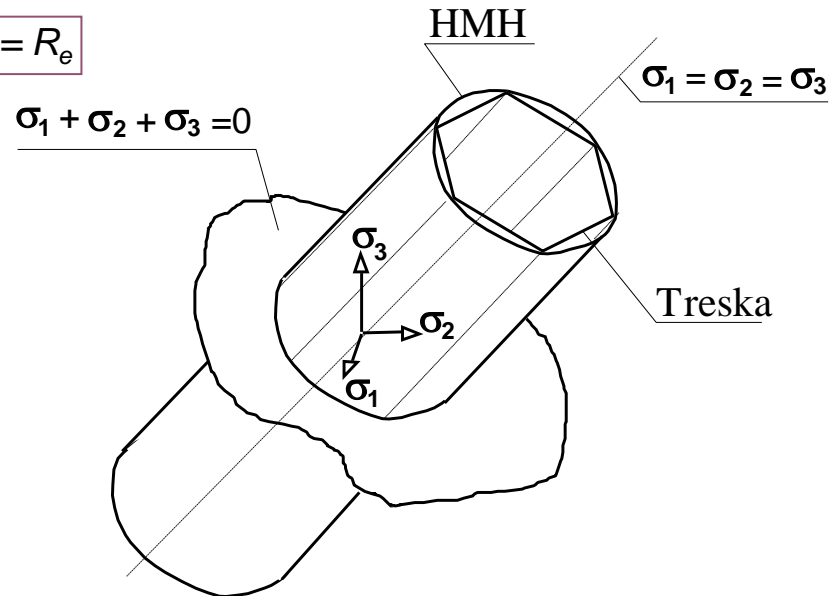
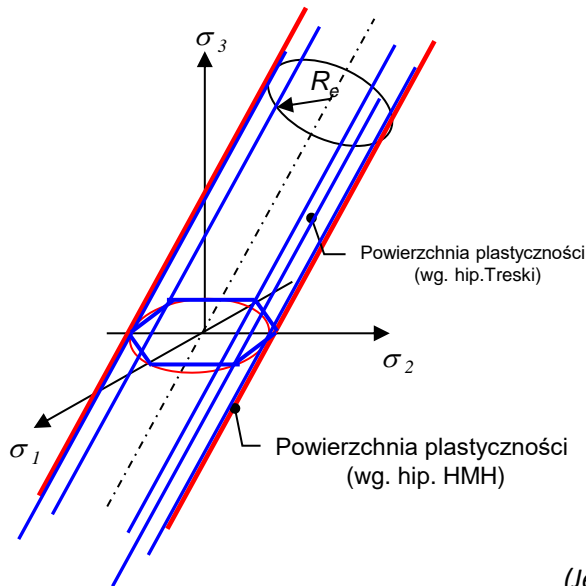
Uplastycznienie nastąpi, gdy gęstość energii odkształcenia postaciowego (na jednostkę objętości) jest równa lub przekroczy gęstość energii, dla której ten sam materiał uplastycznia się w prostej próbie rozciągania.



$$\sigma_{red}^{HMH} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]}$$

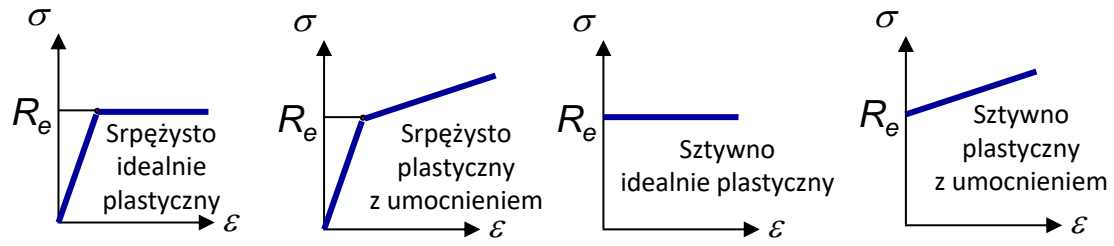
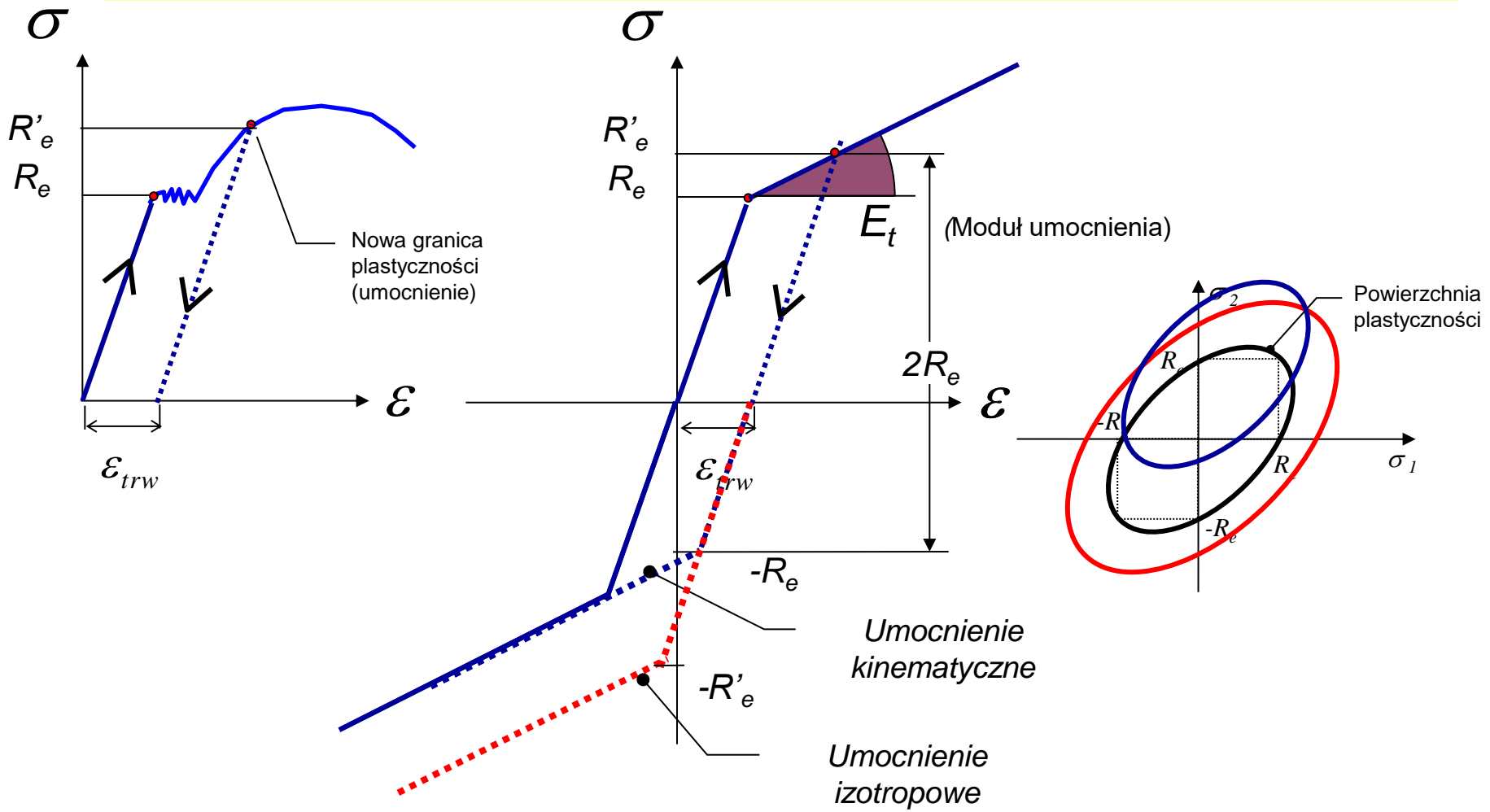
$$\sigma_{red}^{HMH} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

Materiał osiągnie pierwsze uplastycznienie gdy $\sigma_{red} = R_e$



Powierzchnie plastyczności w przestrzeni naprężeń głównych
(Jest to powierzchnia ograniczająca pole naprężeń w trakcie procesu obciążania)

Umocnienie materiału



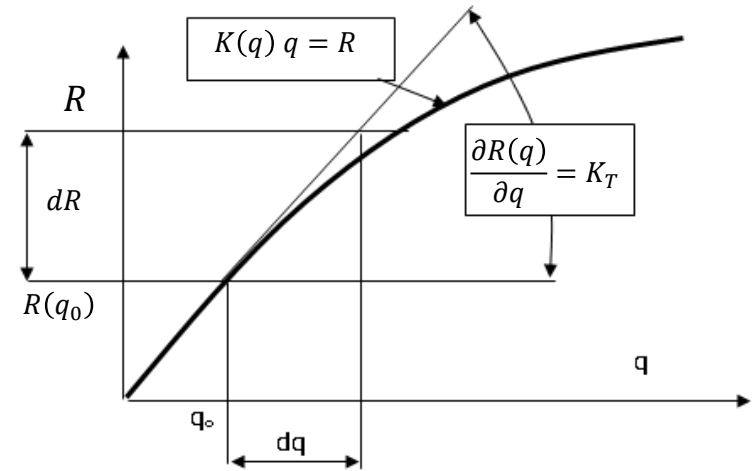
PRACA KONSTRUKCJI W ZAKRESIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM

Zależność pomiędzy wektorem przemieszczeń węzłowych \mathbf{q} a wektorem obciążenia \mathbf{R} w MES można w ogólnym przypadku przedstawić w postaci:

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) \mathbf{q} = \mathbf{R} \quad (1)$$

współczynniki macierzy zależą od deformacji wywołującej stany plastyczne w konstrukcji

Zależność tą dla umownego jednego parametru q można przedstawić w postaci wykresu



Linearyzując układ równań wokół dowolnego położenia równowagi \mathbf{q}_0 otrzymamy równanie przyrostowe:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{q}_0) + \mathbf{K}_T d\mathbf{q} \quad (2)$$

styczna macierz sztywności:

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \int_V \mathbf{B}_0^T \mathbf{D}^* \mathbf{B}_0 dV$$

\mathbf{B}_0 opisuje związek pomiędzy składowymi stanu odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$ a wektorem parametrów węzłowych \mathbf{q} ($\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_0 \mathbf{q}$)

Macierz \mathbf{D}^* określamy z zależności $\mathbf{D}^* = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$

Zakładając warunek plastyczności w postaci:

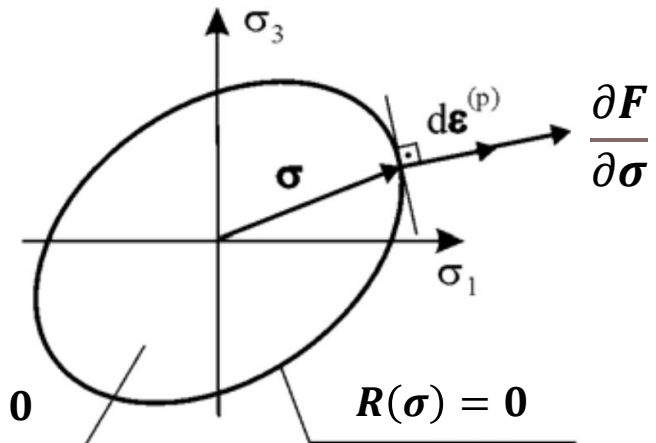
$$F = \sigma_{red} - R_e(\kappa) = 0$$

napr. zred. granica plastyczności.

stowarzyszone prawo płynięcia:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

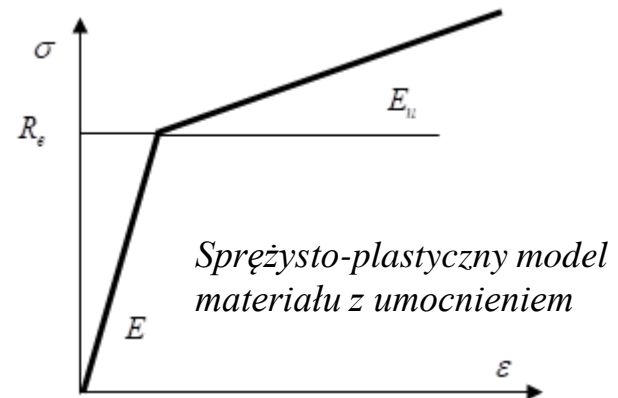
przyrost odkształceń plastycznych stała proporcjonalności



$$\mathbf{D}^* = \mathbf{D} - \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^T} \mathbf{D} \left(E_u + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^T} \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1}$$

\mathbf{D} jest macierzą stałych sprężystych

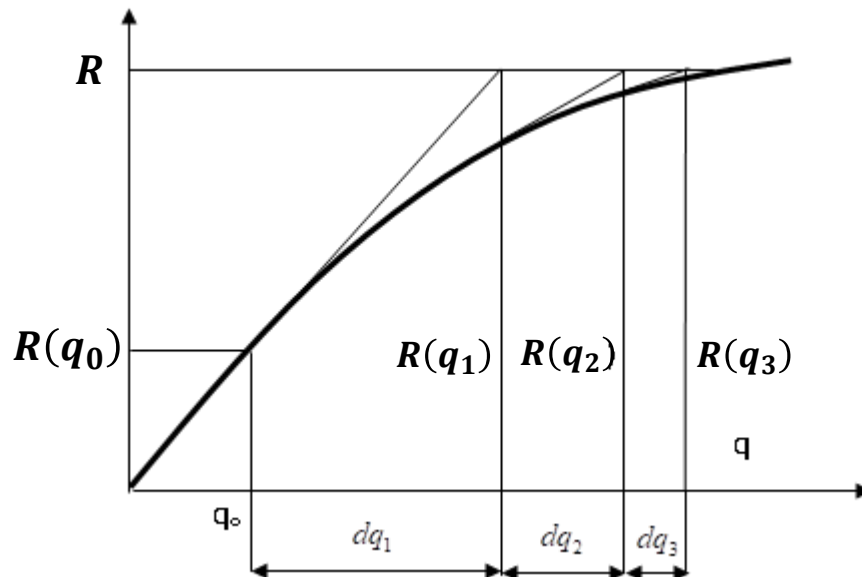
E_u moduł umocnienia po przekroczeniu granicy plastyczności



Nieliniowy układ równań (1),(2) rozwiązuje się zwykle za pomocą technik iteracyjnych.

Jedną z częściej używanych metod iteracyjnych jest metoda Newtona-Raphsona:

$$dq_{i+1} = [K_T^{-1}]_i (R^0 - R(q_i)), \quad q_i = q_0 + \sum_{i=1}^m dq_i$$



Przykład wprowadzenia właściwości plastycznych w programie ANSYS (Multiliniowa charakterystyka z umocnieniem kinematycznym)

Table Data

T1= 20.000
T2= 100.000

KINH Table Preview

SIG

EPS

VNS_MESH_v1lgM_FULL_LC1_NL

Define Material Model Behavior

Material Models Defined

- Material Model Number 1
 - Density
 - Friction Coefficient
 - Emissivity
 - Linear Isotropic
 - Thermal Expansion (seca)
 - Multilinear Kinematic(Gen)
- Material Model Number 2

Material Models Available

- Structural
 - Linear
 - Nonlinear
 - Elastic
 - Plastic
 - Rate Independent
 - Isotropic Hardening Plastic
 - Generalized Anisotropic Hi
 - Kinematic Hardening Plasti
 - Combined Kinematic and k
 - Rate Dependent
 - Non-metal Plasticity

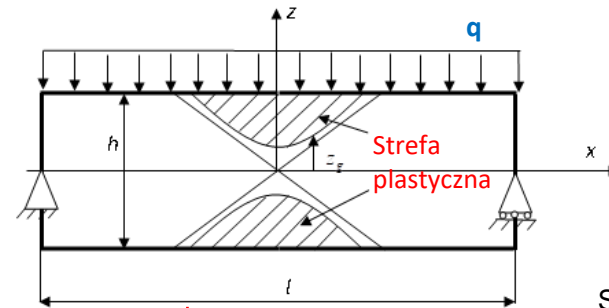
Multilinear Kinematic Hardening for Material Number 1

Stress-Strain Options: Stress versus Total Strain

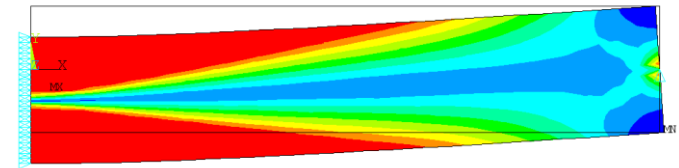
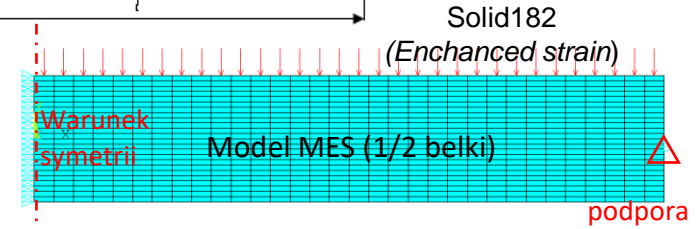
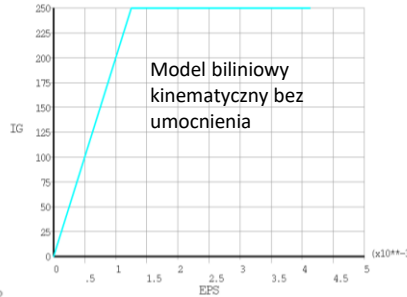
	T1		T2	
	20		100	
	STRAIN	STRESS	STRAIN	STRESS
1	0.00099043	207	3.21906E-03	170
2	0.0077057	240	2.33248E-02	240
3	0.010034	250	3.03222E-02	250
4	0.013173	260	3.79151E-02	260
5	0.017307	270	4.55189E-02	270
6	0.022533	280	5.27187E-02	280
7	0.028771	290	5.93659E-02	290
8	0.035731	300	6.55114E-02	300
9	0.069256	350	0.093323	350
10	0.096611	400	0.12276	400
11	0.12546	450	0.15604	450
12	0.15812	500	0.19341	500
13	0.19494	550	0.2349	550
14	0.23603	600	0.28053	600
15	0.28148	650	0.33033	650

Przykład 1 Belka zginana, naprężenia resztkowe

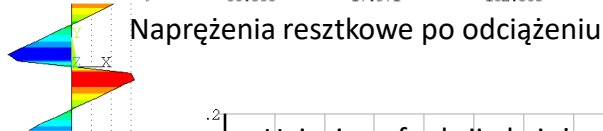
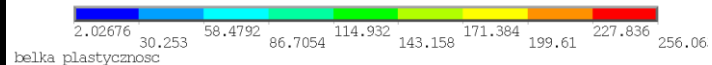
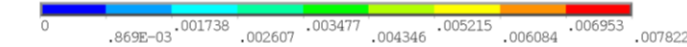
Przeprowadzić analizę nośności granicznej belki o przekroju prostokątnym o grubości $b = 1$ mm, wysokości $h = 20$ mm i długości $l = 200$ mm. Belka jest przegubowo podparta na obu końcach, wykonana z materiału idealnie sprężysto-plastycznego ($R_e = 250$ MPa), poddana działaniu obciążenia ciągłego q .



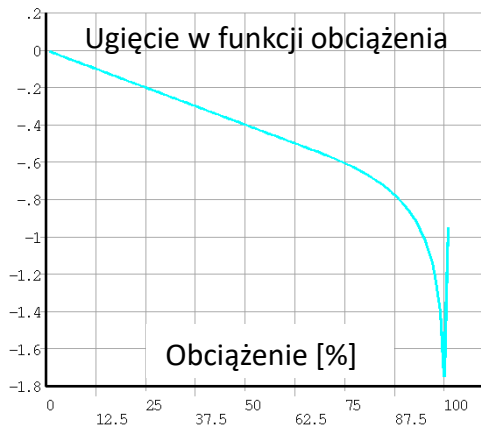
Zredukowane odkształcenia plastyczne (100% obciążenia)



naprężenia zredukowane (100% obciążenia)

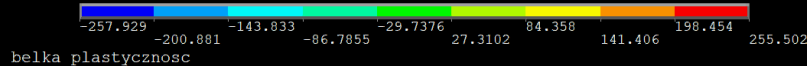
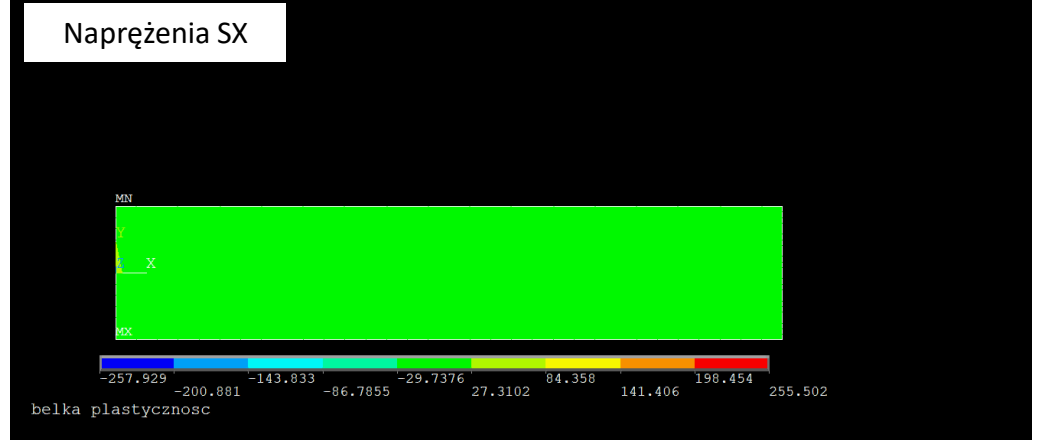


Naprężenia resztkowe po odciążeniu



```
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SX      (AVG)
PSYS=0
DMX = ,00801
SMN =-3,75806
SMX =3,75805
```

Naprężenia SX

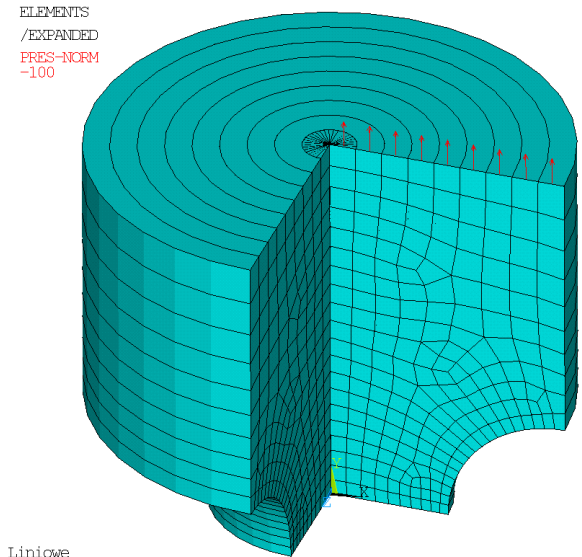
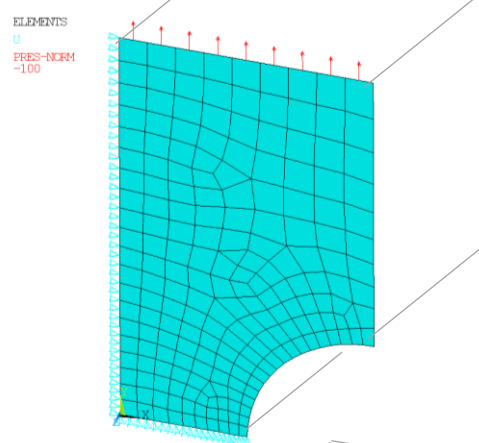
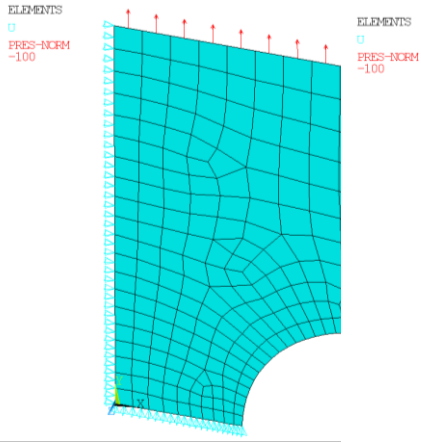
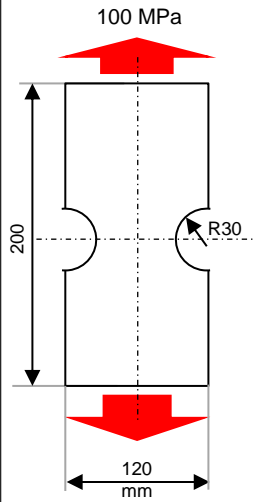


Przykład 2a Próbka aluminiowa 2D z karbem (*model liniowy*)

Płaski Stan Naprężenia

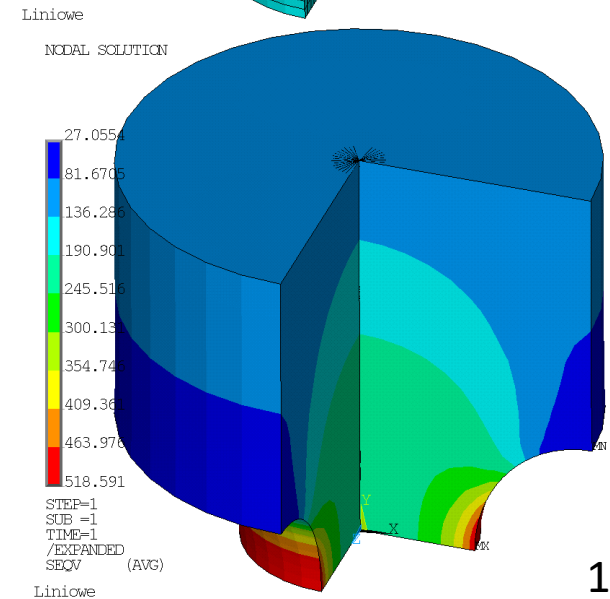
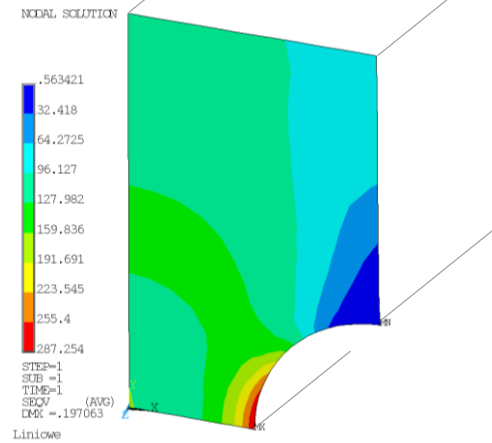
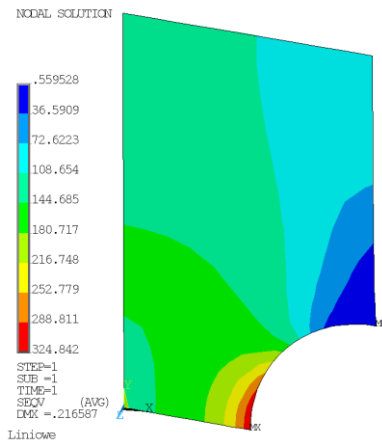
Płaski Stan Odkształcenia

Osiowa symetria



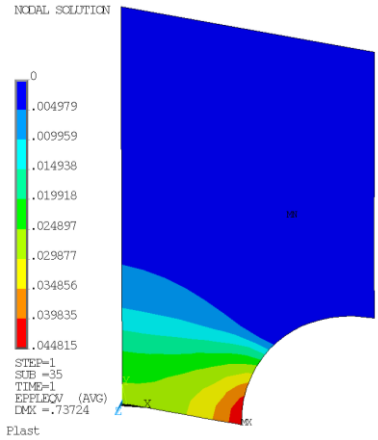
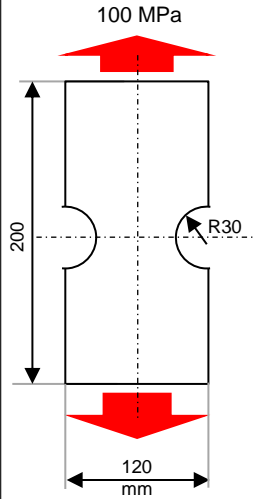
Solid183

$E=7 \cdot 10^4 \text{ MPa}$
 $\nu = 0.32$



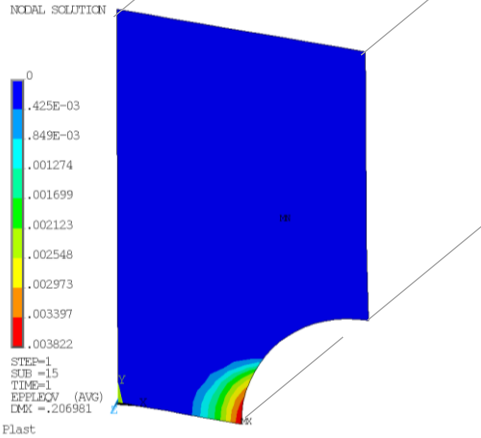
Przykład 2b Próbka aluminiowa 2D z karbem (*model sprężysto-plast.*)

Płaski Stan Naprężenia

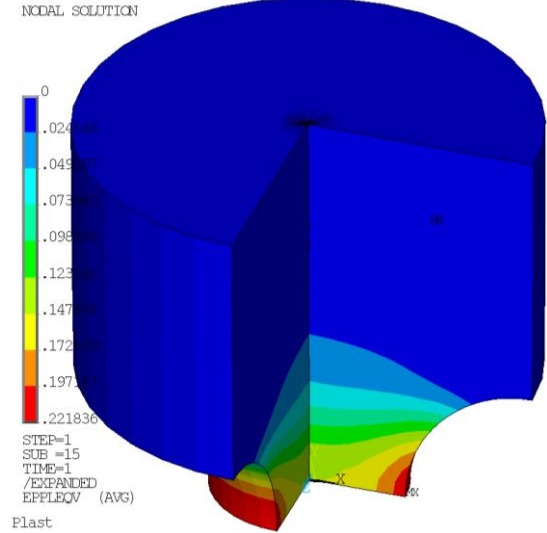


Solid183

Płaski Stan Odkształcenia

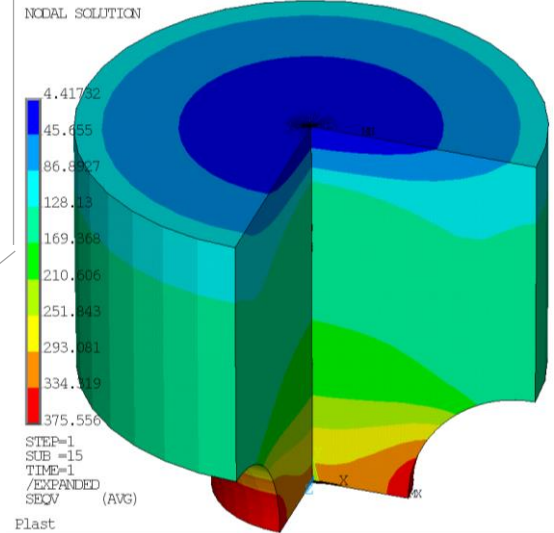
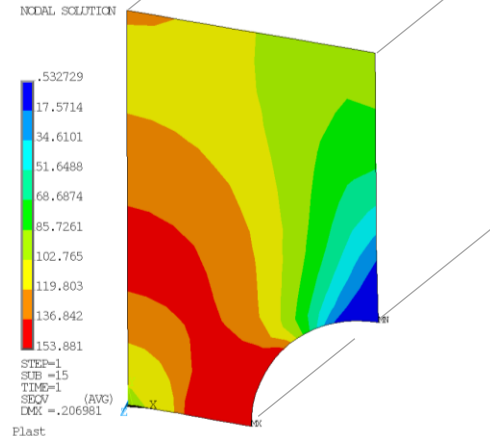
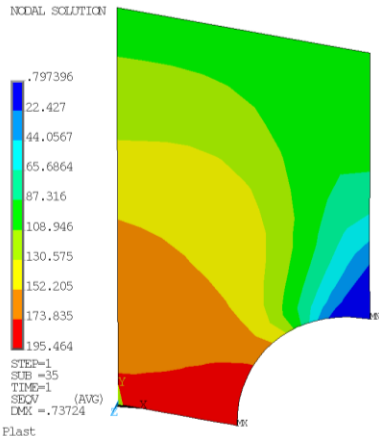
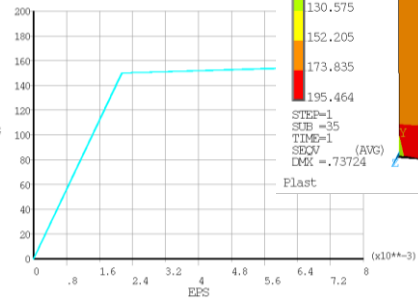


Osiowa symetria



$E=7 \cdot 10^4$ MPa
 $\nu = 0.32$
 $R_{0,2} = 150$ Mpa
 $E_u = 1000$ MPa

BISO Table For Material



MATERIAŁY LEPKOSPĘŻYSTE I LEPKOPLASTYCZNE (Reologia)

Ciała stałe mogą wykazywać cechy cieczy lepkich, co obserwuje się w konstrukcjach pozostających pod obciążeniem w długim okresie czasu, często w podwyższonej temperaturze, kiedy to zależności występujące pomiędzy siłami wewnętrznymi w materiale i deformacjami są funkcjami czasu i temperatury.

$$\varepsilon = f\left(\sigma, \frac{d\sigma}{dt}, t\right)$$

Pełzanie jest to zmiana wymiarów ciała w czasie pod wpływem obciążenia zewnętrznego, niekiedy znacznie mniejszego od granicy plastyczności (np. wydłużenie łopatki turbiny).

Relaksacja jest to spadek w czasie sił wewnętrznych w ciele stałym po skokowym wymuszeniu przemieszczenia (np. spadek naciągu w śrubach mocujących korpus turbiny parowej).

W systemie ANSYS można modelować wymienione zjawiska reologiczne (np. dla konstrukcji stalowych pracujących w temperaturach większych niż 0,3 do 0,4 temperatury topnienia) za pomocą modeli materiałów o wspólnej nazwie **creep** (dla niewielkich prędkości deformacji) lub **viscoplastic** (dla dużych prędkości deformacji). Są to modele fenomenologiczne, w których zakłada się, że prędkość odkształceń spowodowanych pełzaniem opisana jest zależnościami empirycznymi. Najprostszym modelem typu creep jest **model Nortona**:

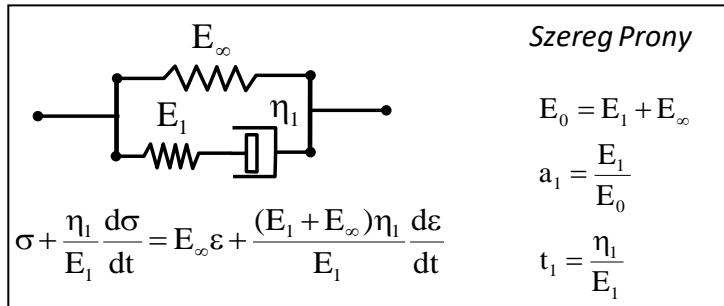
$$\frac{d\varepsilon_{cr}}{dt} = c_1 \sigma^{c_2} e^{\frac{-c_3}{T}},$$

gdzie: ε_{cr} są to zredukowane odkształcenia pełzania, c_1, c_2, c_3 – stałe materiałowe, σ – naprężenia zredukowane, T – temperatura

Do obliczeń materiałów typu **creep** i **viscoplastic** w systemie ANSYS zalecane jest stosowanie niejawnych schematów całkowania (*implicit*). W pierwszym kroku czasowym poszukiwana jest odpowiedź sprężysta (lub sprężysto-plastyczna) na obciążenie nominalne, a w następnych krokach (za pomocą komendy *RATE, ON*) uruchamiana jest procedura do całkowania po czasie, służąca do wyznaczenia wzrostu odkształceń pełzania.

Do jednoczesnego modelowania zjawisk sprężystych i lepkich w ciałach stałych stosuje się **modele strukturalne**, które składają się z kombinacji sprężyn o module sprężystości E [MPa] i tłumików wiskotycznych o lepkości η [MPa·h]. W systemie ANSYS są to materiały o nazwie *viscoelastic*, w których odpowiedź struktury na wymuszenie siłowe lub przemieszczeniowe jest sumą odpowiedzi natychmiastowej, pochodzącej od części sprężystej i odpowiedzi zachodzącej w czasie, pochodzącej od części lepkiej.

Przykładem modelu typu *viscoelastic* jest model standardowy, będący uproszczeniem szeregu Prony, składający się z dwóch gałęzi połączonych równolegle (jednej gałęzi sprężystej, drugiej ze sprężyną i tłumikiem połączonymi szeregowo).

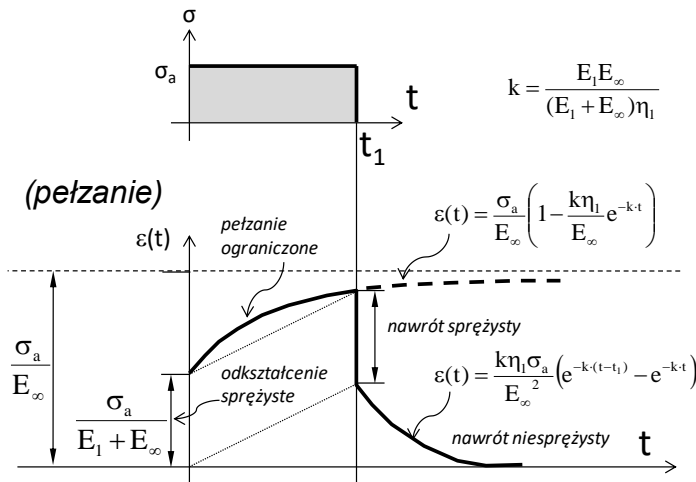


← Model strukturalny standardowy, równanie konstytutywne, współczynniki w szeregu Prony

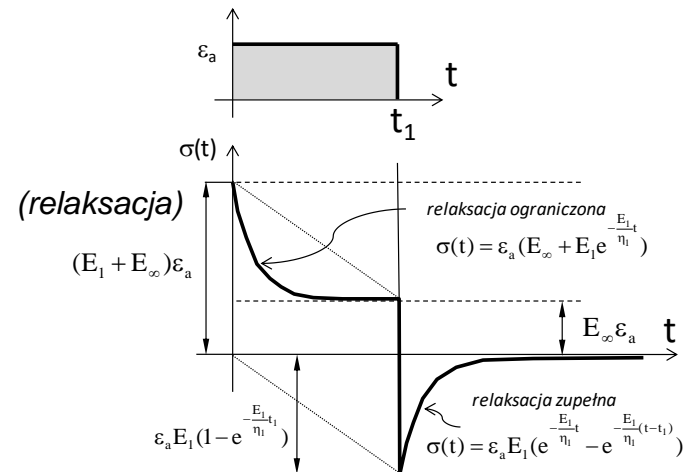
parametry zastępcze:

E_0 – moduł Younga (natychmiastowy) [MPa],
 a_1 – bezwymiarowy parametr określający sprężystość pierwszej gałęzi lepkoelastycznej
 t_1 – stała czasowa [h].

Zachowanie modelu standardowego można przedstawić za pomocą wykresów dla prób pełzania i relaksacji z odciążeniem. Standardowy model trójparametrowy jest często stosowany do symulacji materiałów wykazujących cechy lepkoelastyczne.



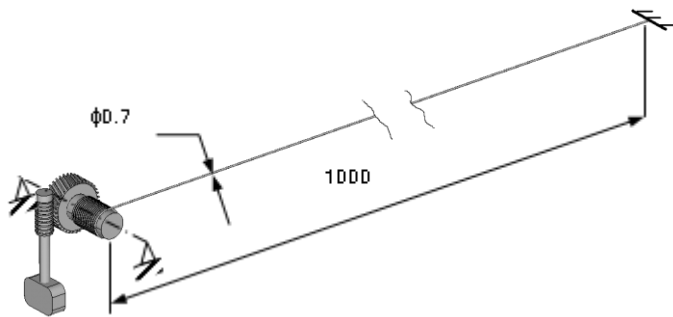
Charakterystyki modelu standardowego w próbie pełzania dla impulsu wymuszenia: σ_a – naprężenie pełzania



Charakterystyki modelu standardowego w próbie relaksacji dla impulsu wymuszenia: ε_a – odkształcenie relaksacji

Zagadnienie typu viscoelastic (dla dużych prędkości deformacji)

Przykład 3 Model struny z przekładnią ślimakową (relaksacja)



Nylonowa struna instrumentu muzycznego podczas zakładania podlega relaksacji (rys.).

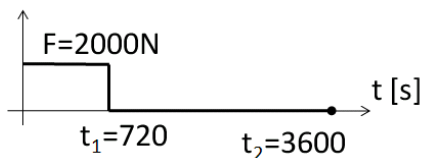
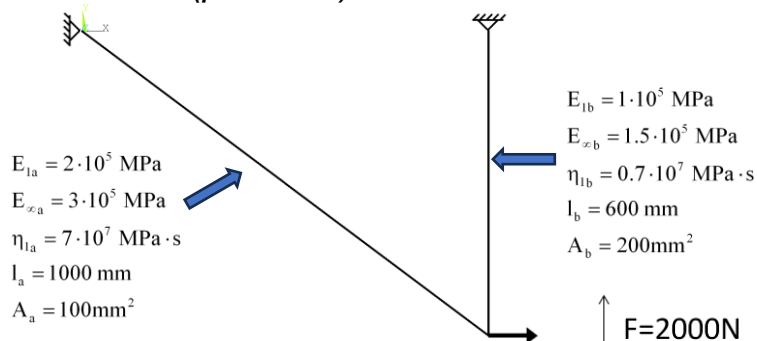
Naciąg uzyskiwany jest poprzez przekładnię ślimakową (samohamowną) przez nawijanie struny na sworzeń.

Naciąg struny koryguje się kilkakrotnie za pomocą dodatkowych obrotów pokrętki. Siłę nominalną naciągu $F_n=76.7$ N można zmierzyć stroikiem na podstawie częstotliwości drgań struny, stąd przy każdej korekcie naciąg dochodzi do wartości nominalnej, a następnie spada w czasie ze względu na relaksację materiału. Zadaniem jest uzyskanie możliwie najkrótszego czasu ustabilizowania się naciągu nominalnego w strunie oraz niedopuszczenie do jej zerwania (naciąg maksymalny $F_{max}=150$ N).

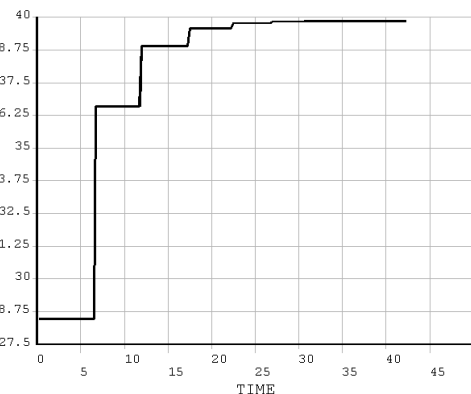
Przykład 4 Model kratownicy

Dla kratownicy statycznie wyznaczalnej, której pręty różnią się wartościami stałych lepko-sprężystych opisujących model standardowy, przeprowadzić obliczenia pełzania dla impulsu siły.

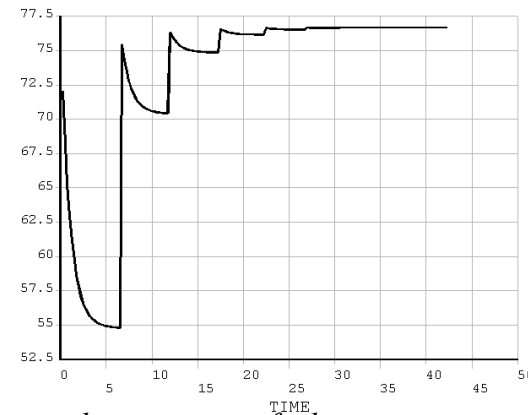
(pełzanie)



UX_2 [mm]



SMISC1_2 [N]



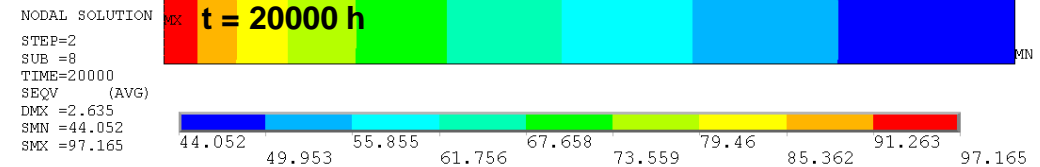
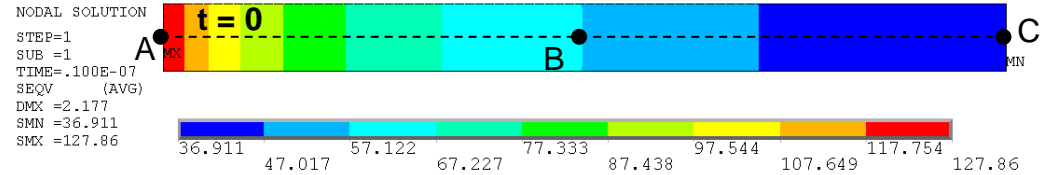
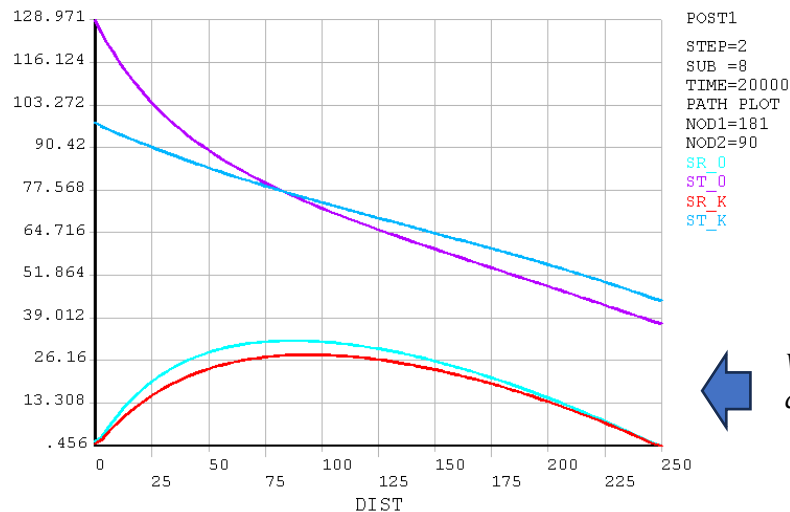
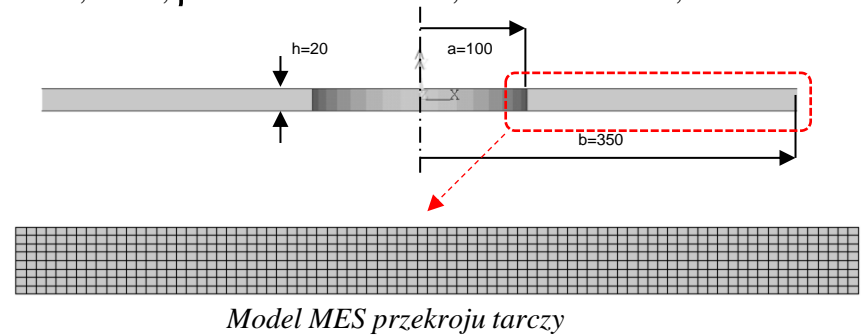
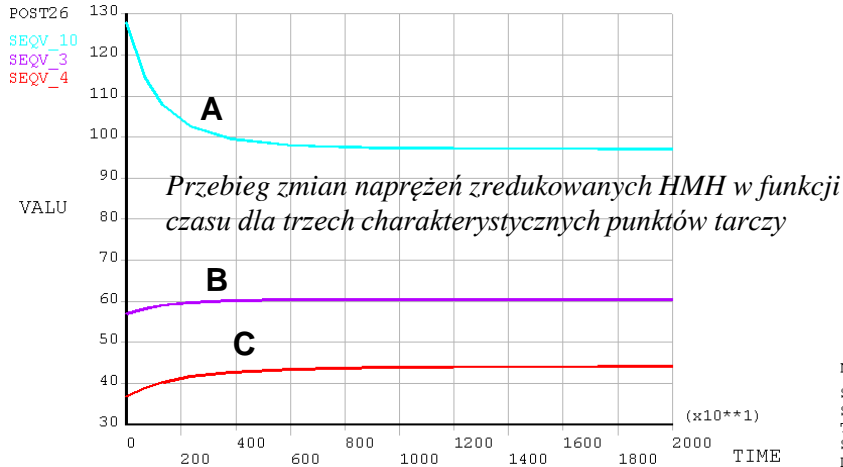
Wymuszenie przemieszczeniowe i siła w strunie w funkcji czasu

Zagadnienie typu creep (dla niewielkich prędkości deformacji)

Przykład 5 Tarcza wirująca obciążona temperaturą (pełzanie)

Stalowa tarcza kołowa o stałej grubości z otworem obciążona jest siłami masowymi pochodzącymi od wirowania z częstością kołową ω oraz podgrzana do stałej temperatury pracy T_p . Wyznaczyć przemieszczenia i naprężenia w tarczy w stanie początkowym oraz wywołane pełzaniem po 20000h. Do obliczeń przyjmij model Nortona.

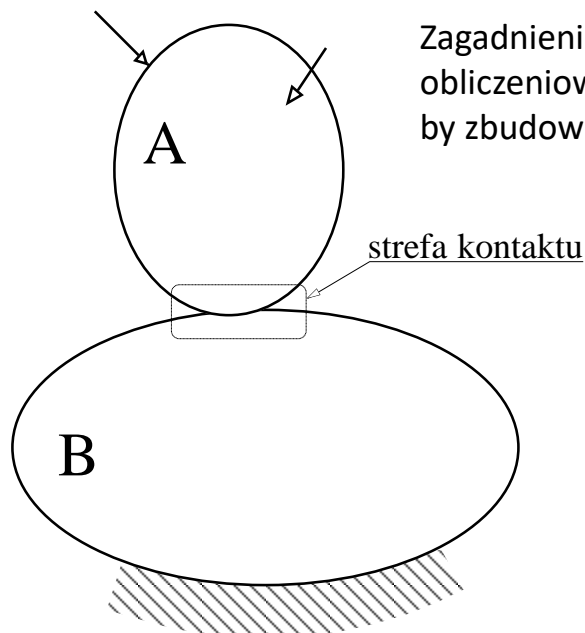
Dane dla temperatury T_p : $E = 1.75 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0.3$, $B = 3.38 \cdot 10^{-11}$ MPa⁻²·h⁻¹, $n = 2$, $\rho = 7.8 \cdot 10^{-9}$ Ns²/mm⁴, $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5}$ 1/K, $\omega = 400$ rad/s.



Rozkłady naprężeń zredukowanych HMH dla chwili $t = 0$ i $t = 20000$ h uzyskane metodą MES

Wykres naprężeń promieniowych (SR) i obwodowych (ST) dla dwóch różnych chwil czasowych wzdłuż promienia tarczy (SR_0 i ST_0 – dla chwili $t = 0$, SR_K, ST_K dla chwili $t = 20000$ h)

ZAGADNIENIA KONTAKTU CIAŁ ODKSZTAŁCALNYCH



Zagadnienia kontaktu są silnie nieliniowe i zwykle wymagają znacznych nakładów obliczeniowych. Z tego względu ważne jest właściwe zrozumienie fizycznej strony zadania by zbudować efektywny model numeryczny.

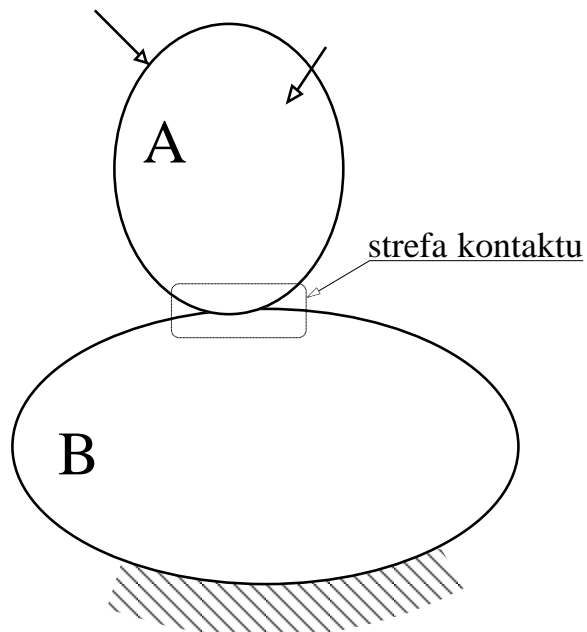
Zadania kontaktu wiążą się z dwoma **podstawowymi trudnościami**:

- strefa kontaktu nie jest dokładnie znana i zależy m.in. od takich czynników, jak obciążenie, własności materiałowe, warunki brzegowe (*kontaktujące się powierzchnie ciał mogą wchodzić w kontakt i tracić go w sposób trudny do przewidzenia*).
- tarcie jest dodatkowym czynnikiem wprowadzającym nieliniowość i może czasem powodować trudności ze zbieżnością procesu iteracyjnego.

Istnieją zasadniczo dwie klasy zagadnień kontaktu:

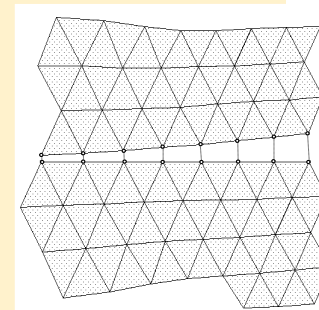
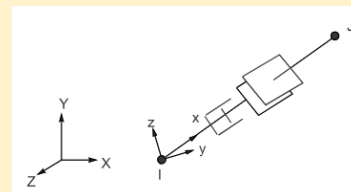
- kontakt między ciałem sztywnym a sprężystym (rigid-to-flexible)
 - kontakt między ciałami sprężystymi (flexible-to-flexible).
-
- W przypadku zadań, w których istnieje duża dysproporcja między sztywnością kontaktujących się ciał, wskazane jest użycie kontaktu typu **rigid-to-flexible** (*przykładem takich zadań są zadania obróbki plastycznej metali*)
 - Druga klasa zagadnień, **flexible-to-flexible**, występuje w przypadku kontaktu ciał o zbliżonej wartości modułu Younga (*należy wtedy uwzględnić podatność wszystkich będących w kontakcie ciał*).

ZAGADNIENIA KONTAKTU CIAŁ ODKSZTAŁCALNYCH

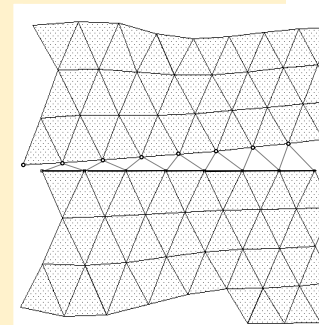
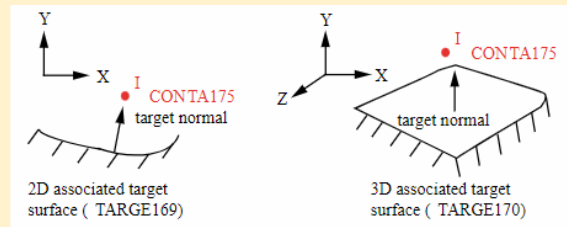


Dostępnych jest kilka modeli kontaktu:

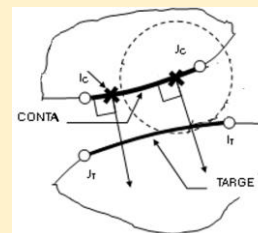
- kontakt typu węzeł-węzeł (*node-to-node*)



- typu węzeł-powierzchnia (*node-to-surface*)



- typu powierzchnia-powierzchnia (*surface-to-surface*)



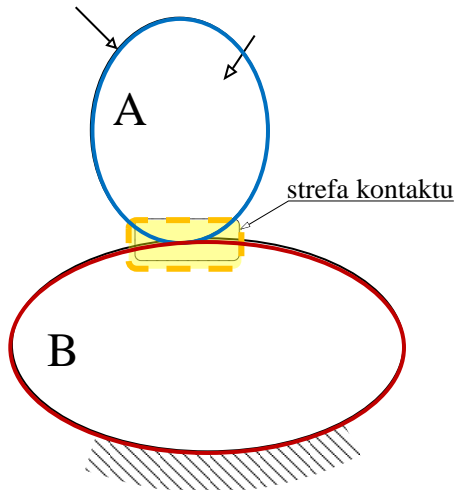
Każdy typ kontaktu używa innego zestawu elementów kontaktu.

W zadaniu kontaktu ważne jest zdefiniowanie strefy potencjalnego kontaktu reprezentowanego przez węzły brzegowe lub elementy związane z powierzchnią brzegową.

Model obliczeniowy rozpoznaje możliwe pary kontaktowe przez specjalne elementy, które zostają zbudowane w tej strefie.

Idea tworzenia elementów strefy kontaktu

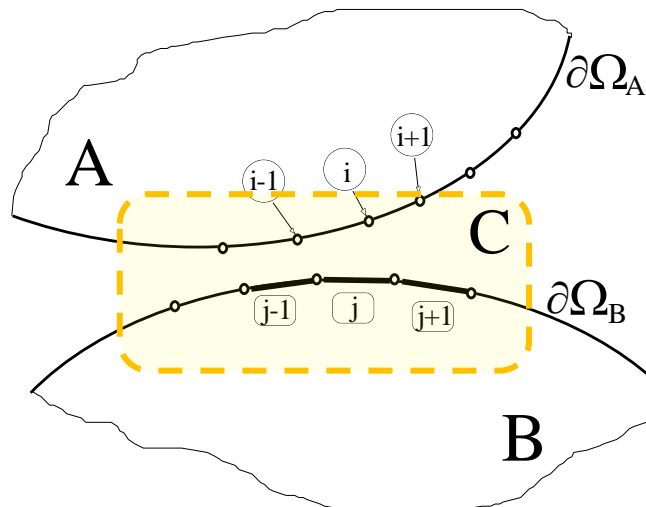
Sytuacja kontaktu dwóch ciał



Nieliniowość kontaktu:

$$[K]\{q\} = \{F\}$$

Strefa kontaktu



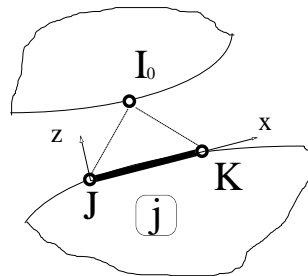
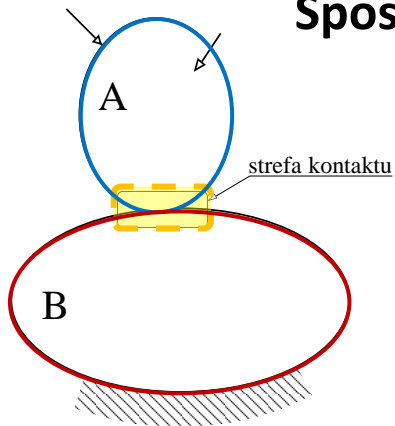
Brak kontaktu:

$$K = \begin{bmatrix} K_A & \\ & K_B \end{bmatrix}$$

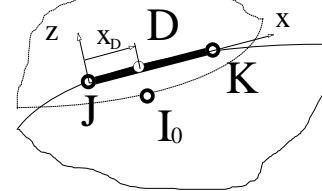
Jest kontakt:

$$K = \begin{bmatrix} K_A & & \\ & K_C & \\ & & K_B \end{bmatrix}$$

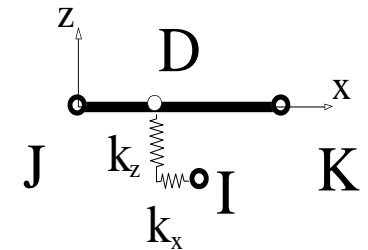
Sposób wchodzenia w kontakt i powstanie nowego elementu na przykładzie *kontaktu node-segment*



faza zbliżania



wejście w kontakt



element kontaktu

Procedura śledzenia warunków kontaktu:

1. Niech ciało A, wchodzące w kontakt, ma na swym brzegu wyodrębnione węzły mogące potencjalnie wejść w kontakt z ciałem B,
2. Niech ciało B, będące celem kontaktu, ma na brzegu segmenty (boki elementów) mogące potencjalnie zetknąć się z węzłami brzegowymi ciała A,
3. W każdej chwili czasu, każdy segment ciała B śledzi wybrane najbliższe węzły mogące wejść w kontakt.
4. W chwili gdy jeden z węzłów – znajdzie się blisko segmentu (o węzłach J i K), zostaje sprawdzona jego współrzędna względem lokalnego układu segmentu.
5. Jeśli węzeł trafi w segment, wtedy węzeł zostaje związany z segmentem elementami sprężystymi w punkcie trafienia. Sprężysty element kontaktu ma sztywność normalną na tyle dużą, by praktycznie uniemożliwić penetrację. Sztywność styczna jest uzależniona od nacisków i współczynnika tarcia.
6. Założony zostaje nowy element
7. Przemieszczenie węzła może odbywać się teraz stycznie do linii segmentu.

Związek pomiędzy siłami w "sprężynkach" elementu a przemieszczeniami w układzie lokalnym możemy zapisać jako:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_z \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} u_x \\ z_I \end{Bmatrix} \quad \text{dla} \quad z_I \leq 0, \quad |F_x| \leq \mu \cdot |F_z|$$

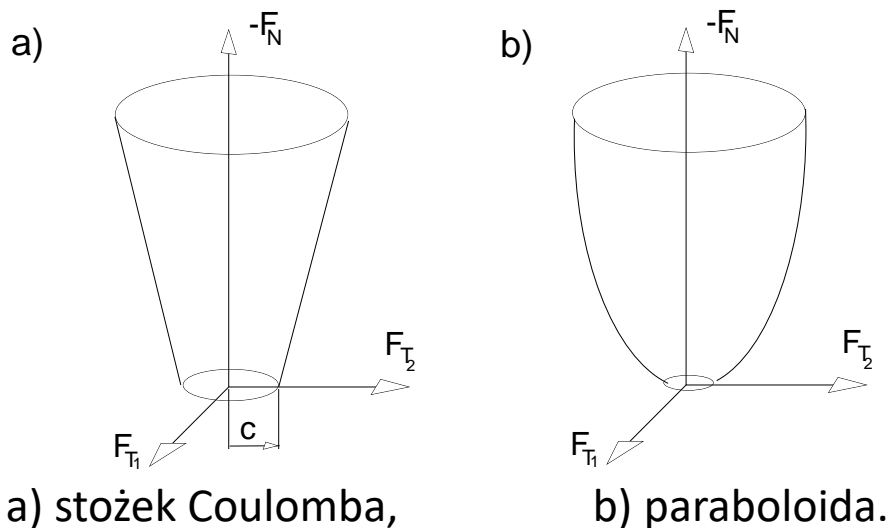
gdzie: k – jest stałą sprężystą,
 u_x – jest przemieszczeniem punktu względem punktu trafienia,
 z_I – jest współrzędną punktu w układzie lokalnym segmentu,
 μ – jest współczynnikiem tarcia.

Możliwe są następujące przypadki kontaktu:

- przyleganie (brak poślizgu),
- poślizg z tarcie; punkt D zmienia swoje położenie z D na D1 (poślizg).

Modelowanie tarcia

Przykładowe kryteria poślizgu:



W przypadku idealnego tarcia (rys. a) gdy siła tarcia zależy tylko od siły nacisku mamy:

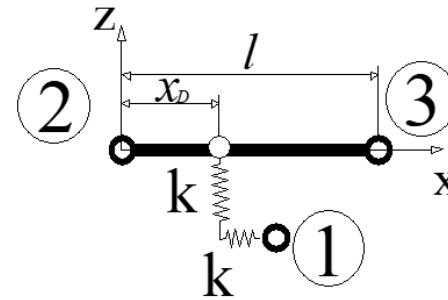
$$Y(F) = \begin{cases} F_N \leq 0 & \text{- kontakt} \\ |F_T| + \mu F_N - C \leq 0 & \text{- poślizg.} \end{cases} \quad (\text{kryterium poślizgu})$$

gdzie: $|F_T| = \sqrt{F_{T_1}^2 + F_{T_2}^2}$, F_T - jest składową styczną siły w kierunku poślizgu,

μ - jest współczynnikiem tarcia,

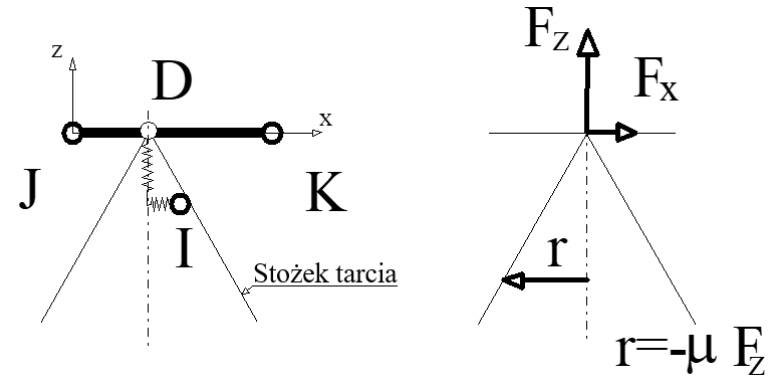
C - jest stałą charakteryzującą adhezję.

Możliwe są następujące przypadki kontaktu:



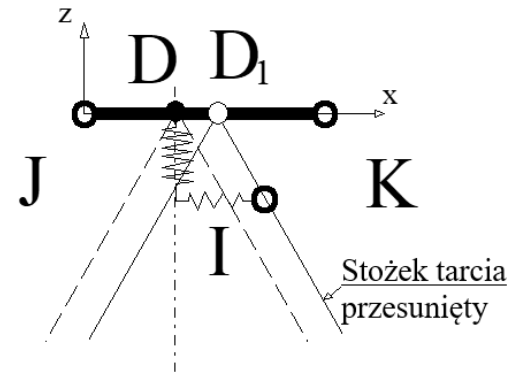
Przyleganie (brak poślizgu - zmianę sił w "sprężynkach" elementu możemy wtedy zapisać:

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_z \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta z_I \end{Bmatrix} \text{ dla } z_I \leq 0, |F_x| < \mu \cdot |F_z| .$$



Poślizg z tarciem - punkt D zmienia swoje położenie z D na D₁ (poślizg), a siły w "sprężynkach" elementu są:

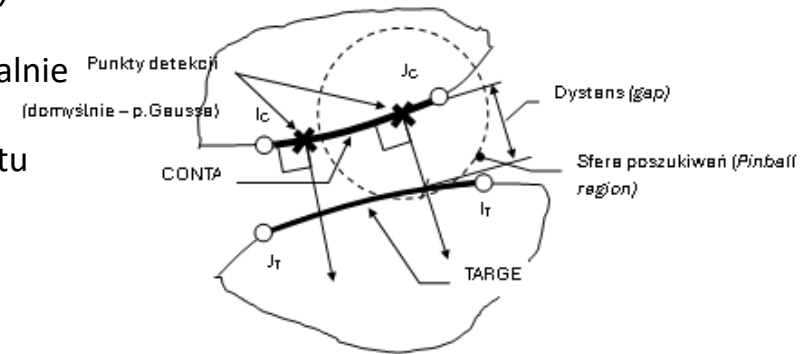
$$\begin{Bmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_z \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta z_I \end{Bmatrix} \text{ dla } z_I < 0, |F_x| = \mu^* |F_z| .$$



Idea kontaktu typu **surface-to-surface**

Na brzegu ciała będącego celem kontaktu umieszczane są elementy kontaktowe CONTA, a na brzegu ciała, które ma być celem – osobne elementy celu TARGE (w przypadku stosowania sztywnego celu (rigid target) można wygenerować bezpośrednio element TARGE o wybranym kształcie).

Oddziaływanie pomiędzy elementami CONTA i TARGE jest potencjalnie możliwe, gdy posiadają one ten sam numer stałej typu real. Do kontaktu dochodzi, gdy nastąpi penetracja powierzchni kontaktu przez powierzchnię celu, co jest śledzone w punktach detekcji kontaktu, którymi są punkty całkowania związane z węzłami lub punktami Gaussa.



Element kontaktu jest powstrzymany więzami tak by nie penetrował przez powierzchnię celu w tych punktach detekcji. Jednak powierzchnia celu może penetrować przez powierzchnię kontaktu. Używanie punktów Gaussa jako punktów detekcji daje z reguły lepsze wyniki niż śledzenie węzłów kontaktu. Głębokość penetracji jest mierzona w kierunku normalnym od powierzchni kontaktu w punktach detekcji do powierzchni celu.

Położenie i ruch elementu CONTA względem związanego z nim elementu TARGE wyznacza status kontaktu elementu.

Program monitoruje każdy z elementów kontaktu i przypisuje mu jeden ze statusów:

STAT = 0 – otwarty odległy (element celu znajduje się poza sferą wokół punktu całkowania elementu kontaktu - pinball region)

STAT = 1 – otwarty bliski (element celu znajduje się wewnątrz sfery wokół punktu całkowania elementu kontaktu - pinball region)

STAT = 2 – kontakt z poślizgiem

STAT = 3 – kontakt z przyleganiem

Położenie i ruch elementu CONTA względem związanego z nim elementu TARGE wyznacza status kontaktu elementu.

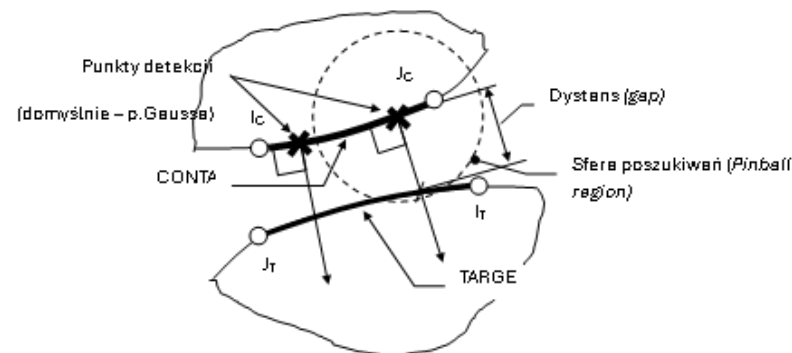
Program monitoruje każdy z elementów kontaktu i przypisuje mu jeden ze statusów:

STAT = 0 – otwarty odległy (*element celu znajduje się poza sferą wokół punktu całkowania elementu kontaktu - pinball region*)

STAT = 1 – otwarty bliski (*element celu znajduje się wewnątrz sfery wokół punktu całkowania elementu kontaktu - pinball region*)

STAT = 2 – kontakt z poślizgiem

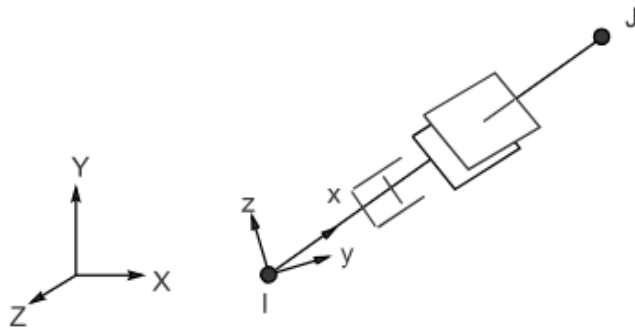
STAT = 3 – kontakt z przyleganiem



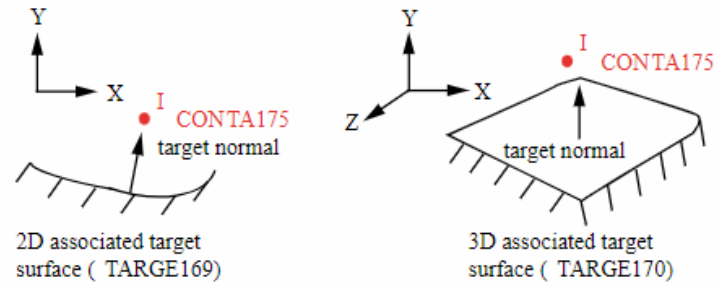
- Najwięcej operacji numerycznych dotyczy elementów w kontakcie.
- Ustawienie właściwego promienia sfery poszukiwań (*pinball region*) pozwala uniknąć błędów kontaktu gdy powierzchnia celu posiada wypukłe obszary. Wartości domyślne ustawień kontaktu z reguły wystarczają do poprawnej analizy.
- Elementy kontaktu mogą oddziaływać nie tylko normalnie do powierzchni kontaktu, ale i stycznie. W klasycznym ujęciu tarcia wg modelu Coulomb'a powierzchnie kontaktujące mogą oddziaływać na siebie przez naprężenia styczne.
- Dostępne są inne modele tarcia, możliwe jest też odklejanie kontaktu w celu zamodelowania efektu delaminacji.
- Możliwe są cztery algorytmy kontaktu (wybierane przez KEYOPT(2)) oparte na metodzie funkcji kary bądź metodzie mnożników Lagrange'a (czystej lub poprawionej).

Przykładowe typy elementów kontaktu w programie ANSYS

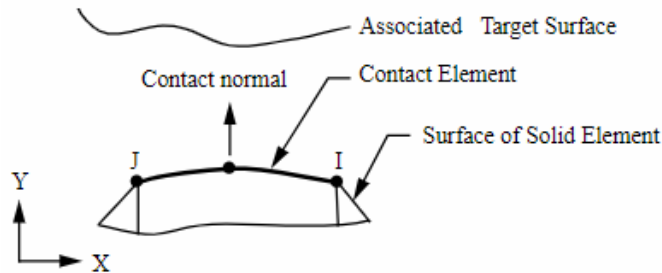
CONTA178 - 3D Node-to-Node Contact



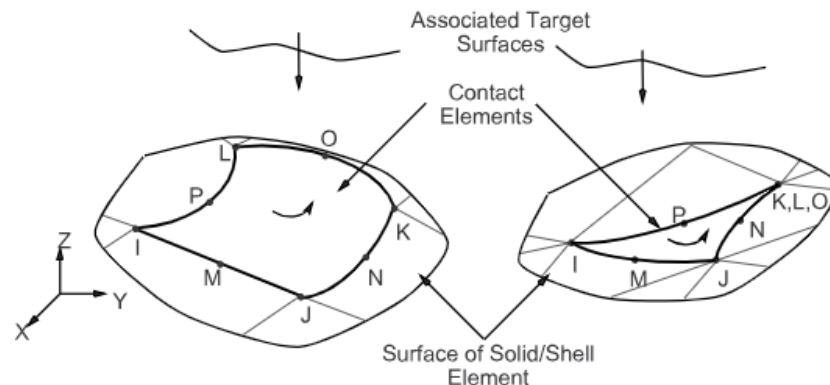
CONTA175 - 2D/3D Node-to-Surface Contact



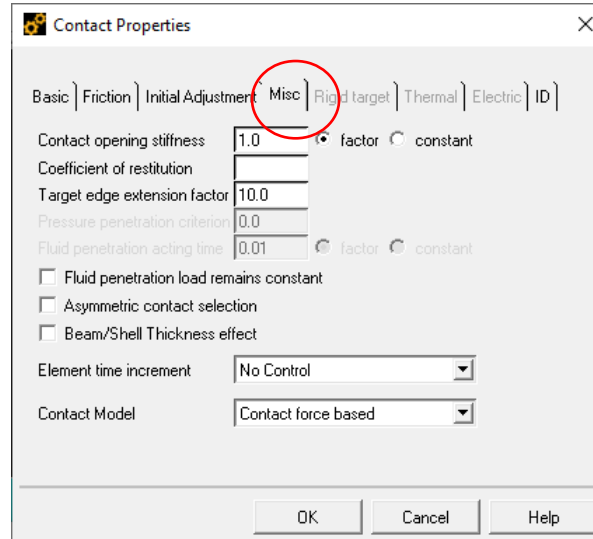
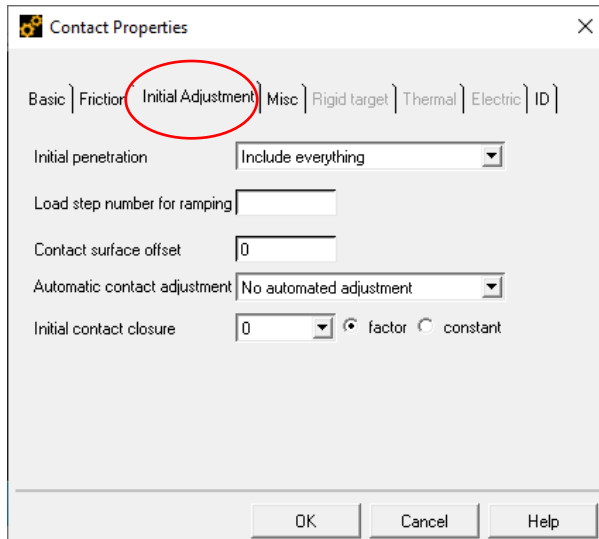
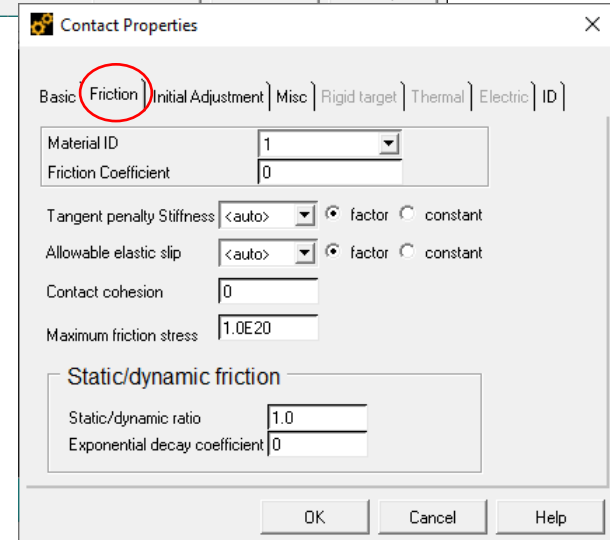
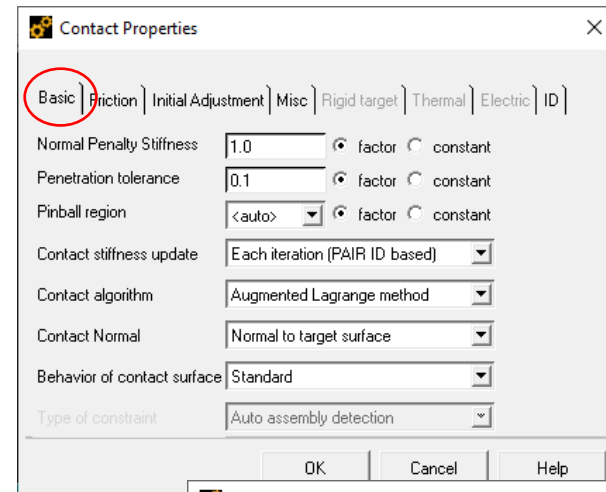
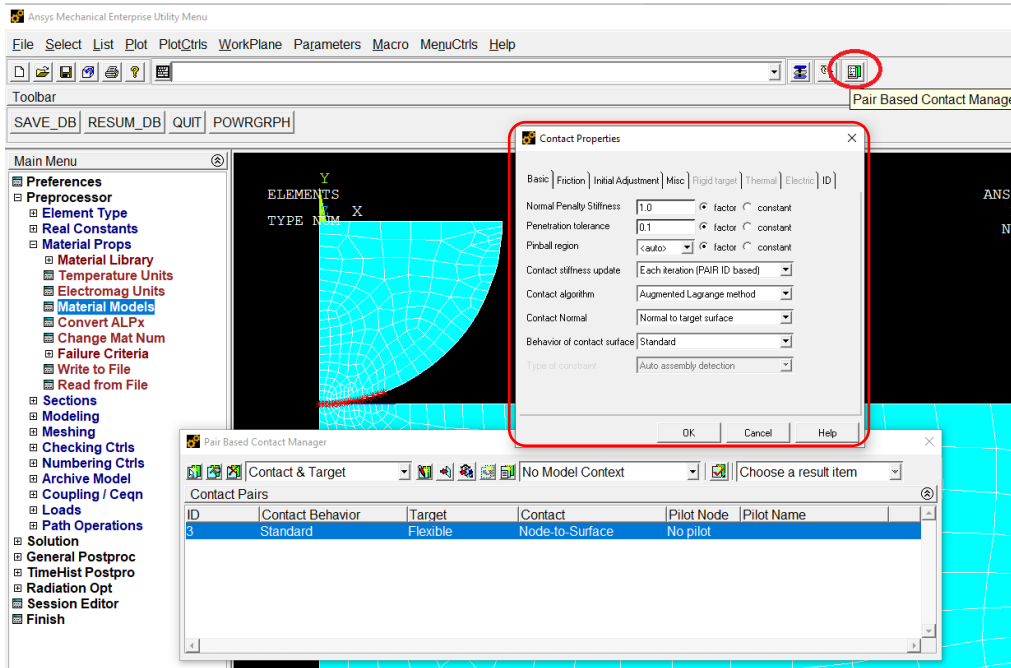
CONTA172 - 2D 3-Node Surface-to-Surface Contact



CONTA174 - 3D 8-Node Surface-to-Surface Contact



Opcje kontaktu w programie ANSYS

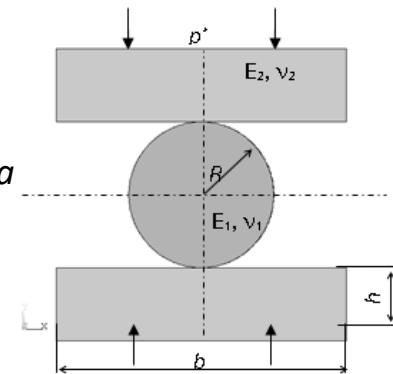


Przykład 6a Rolka ściskana dwoma okładzinami

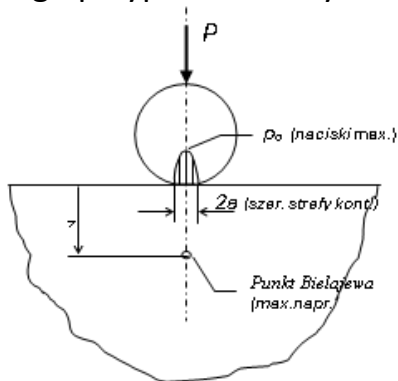
Rozwiązać zadanie ściskania stalowej rolki walcowej pomiędzy dwoma stalowymi okładzinami.

Dane: $R=10\text{mm}$, $h=20\text{mm}$, $b=80\text{mm}$, $E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0,3$, $p^*=10\text{MPa}$

Zagadnienie to można sprowadzić do typowego zadania sprężystego kontaktu między walcem a sprężystą półprzestrzenią. W przekroju poprzecznym układ pracuje w płaskim stanie odkształcenia (PSO).



Według wzorów Hertza dla tego przypadku mamy:



$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$$

$$a^2 = \frac{4PR}{\pi E^*}$$

$$p_0 = \frac{2P}{\pi a} = \sqrt{\frac{PE^*}{\pi R}}$$

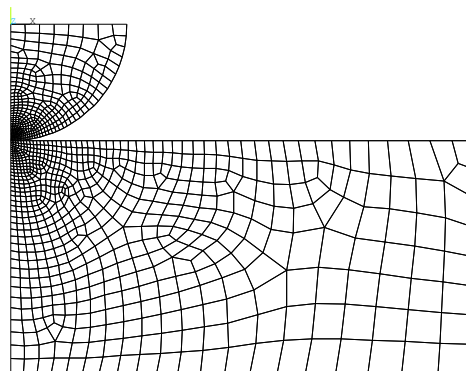
$$z = 0,78a$$

$$(\tau_{xy})_{\max} = 0,3p_0$$

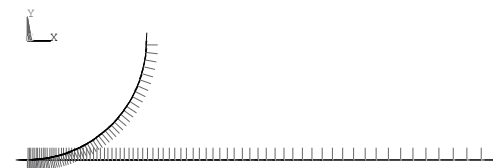
$E^* = 1,099 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, $a = 0,3044 \text{ mm}$,

$p_0 = 1673 \text{ N/mm}^2$, $z = 0,2374 \text{ mm}$,

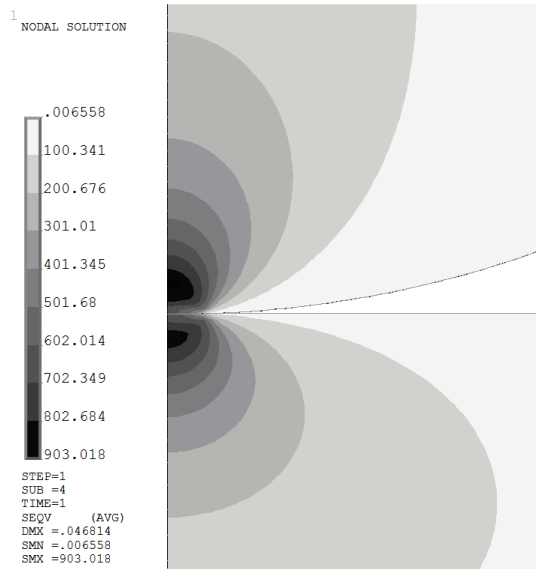
$\tau_{\max} = 502 \text{ N/mm}^2$



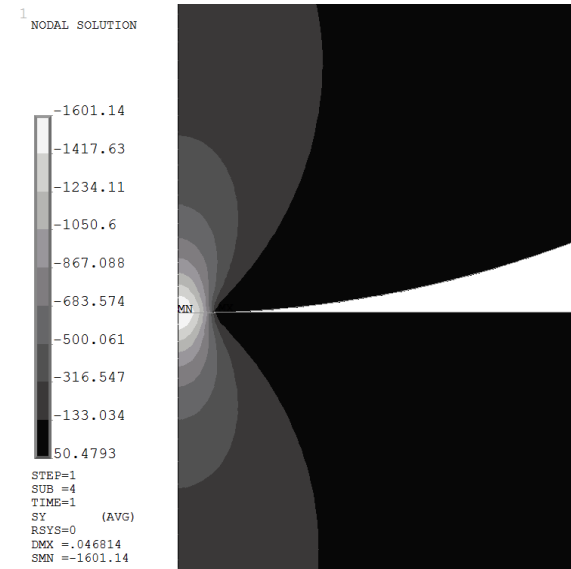
siatka elementów w zadaniu



Generacja elementów kontaktu za pomocą panelu Contact Wizard



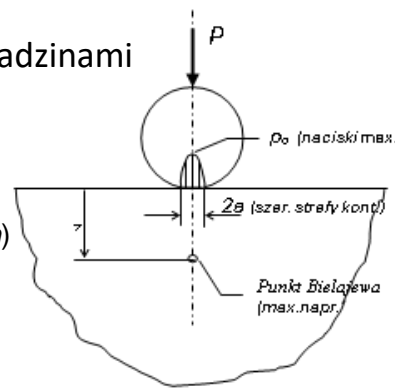
naprężenia zredukowane wg hipotezy Hubera-Misesa



Naprężenia normalne w kierunku pionowym 27

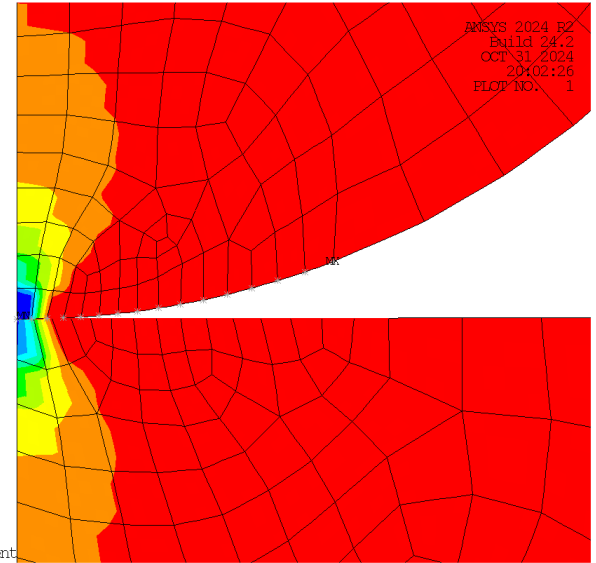
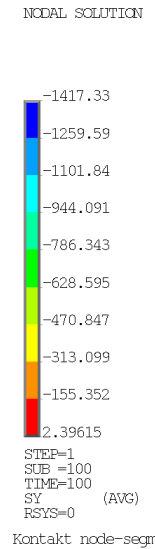
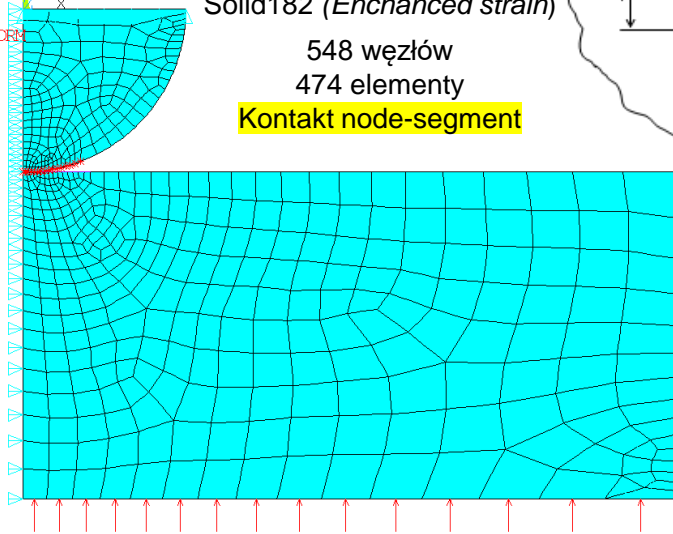
Przykład 6b Rolka ściskana dwoma okładzinami

$E^* = 1,099 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, $a = 0,3044 \text{ mm}$, $p_0 = 1673 \text{ N/mm}^2$,
 $z = 0,2374 \text{ mm}$, $\tau_{max} = 502 \text{ N/mm}^2$

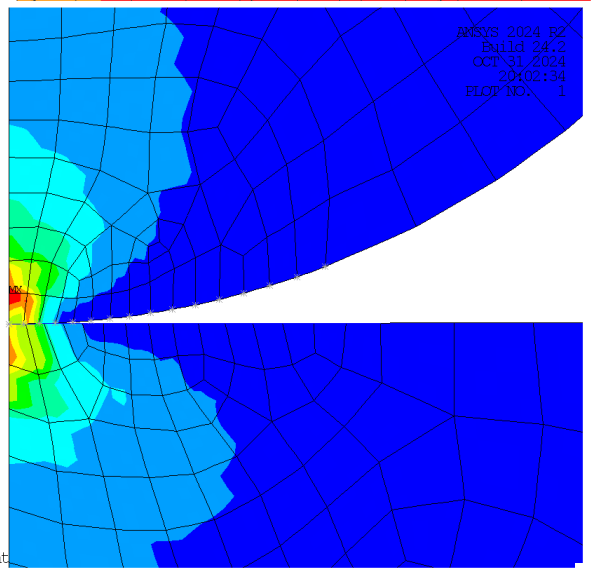
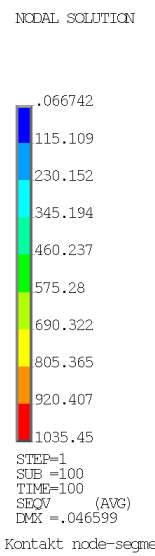
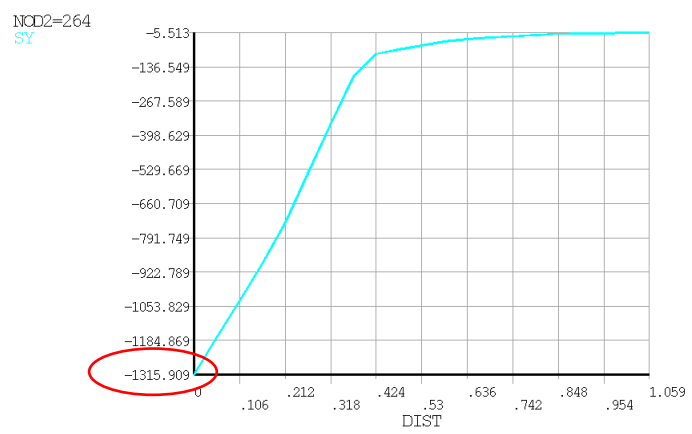
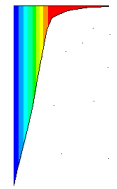
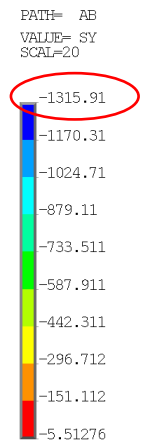


PSO
 ELEMENTS
 TYPE NUM
 U
 PRES-NORM
 10

Solid182 (Enhanced strain)
 548 węzłów
 474 elementy
Kontakt node-segment

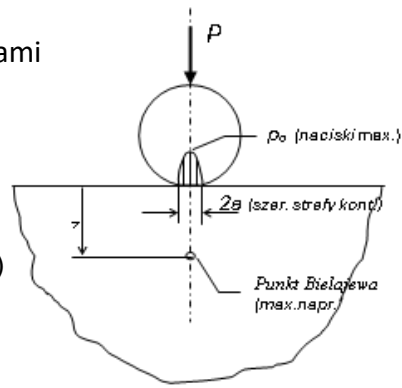


Kontakt node-segment



Kontakt node-segment

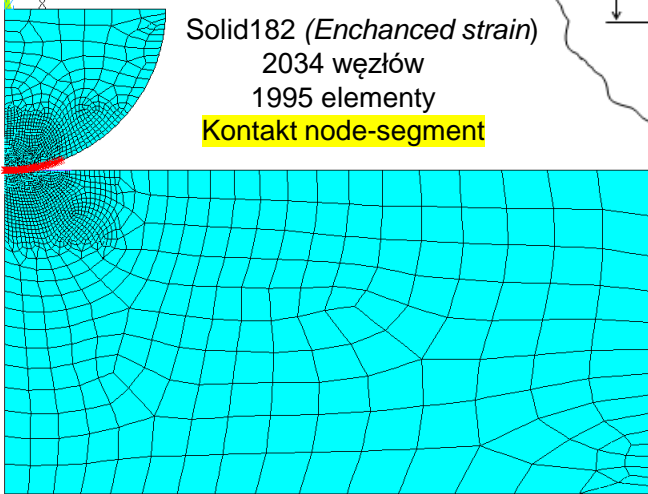
Przykład 6c Rolka ściskana dwoma okładzinami



$E^* = 1,099 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, $a = 0,3044 \text{ mm}$, $p_0 = 1673 \text{ N/mm}^2$,
 $z = 0,2374 \text{ mm}$, $\tau_{max} = 502 \text{ N/mm}^2$

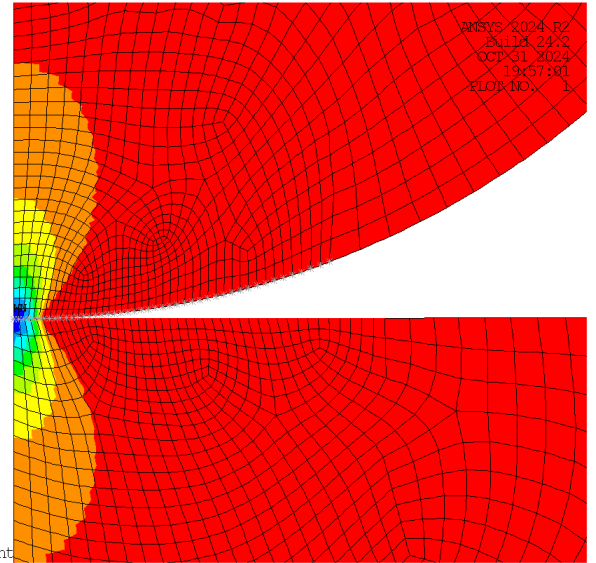
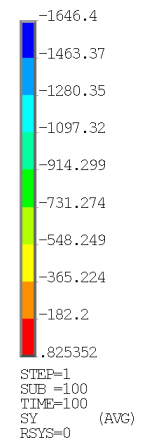
ELEMENTS
TYPE NUM

PSO



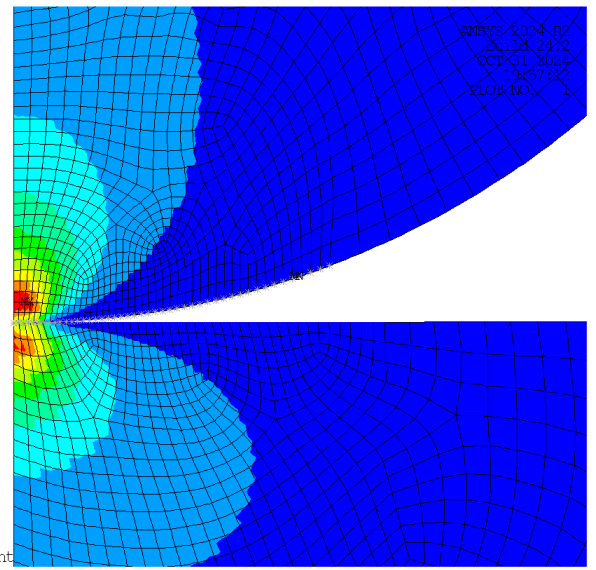
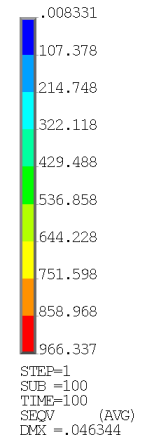
Solid182 (Enhanced strain)
 2034 węzłów
 1995 elementy
 Kontakt node-segment

NODAL SOLUTION



Kontakt node-segment

NODAL SOLUTION

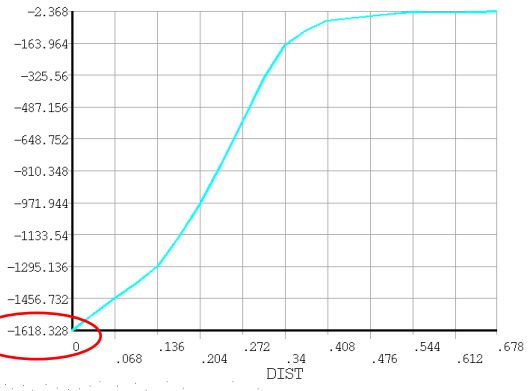
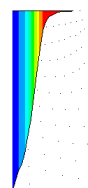
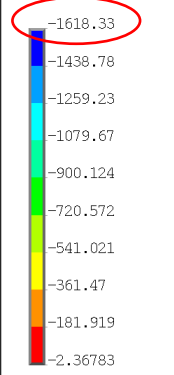


Kontakt node-segment

Kontakt node-segment

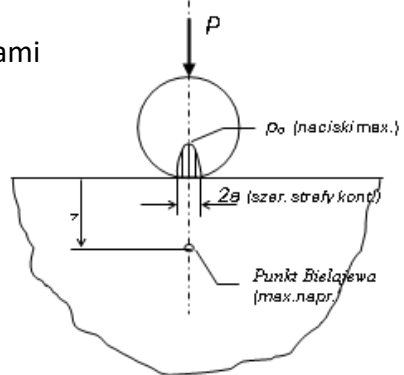
NOD2=647
SY

PATH= AB
 VALUE= SY
 SCAL=20



Kontakt node-segment

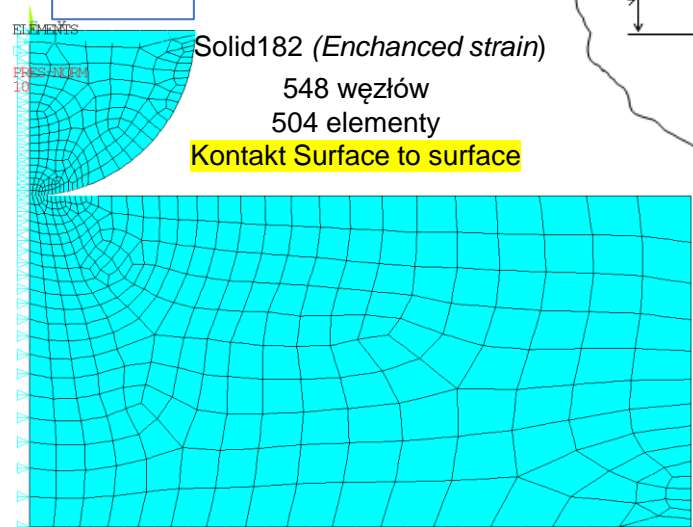
Przykład 6d Rolka ściskana dwoma okładzinami



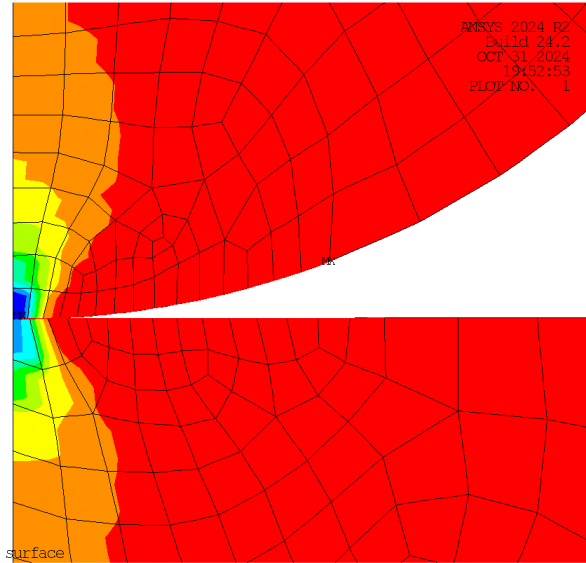
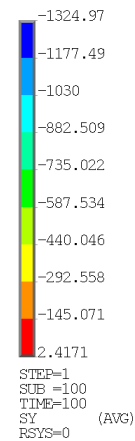
$E^* = 1,099 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, $a = 0,3044 \text{ mm}$, $p_0 = 1673 \text{ N/mm}^2$,
 $z = 0,2374 \text{ mm}$, $\tau_{max} = 502 \text{ N/mm}^2$

PSO

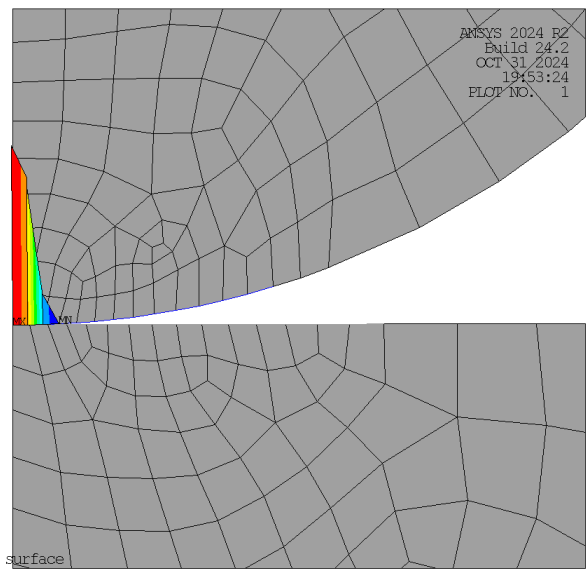
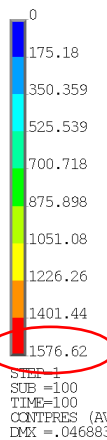
Solid182 (Enhanced strain)
 548 węzłów
 504 elementy
Kontakt Surface to surface



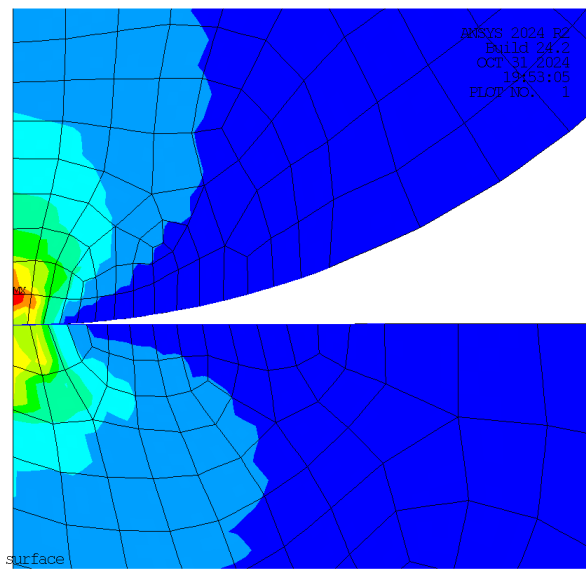
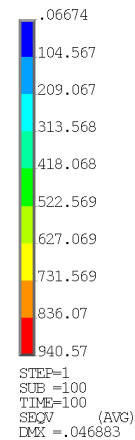
NODAL SOLUTION



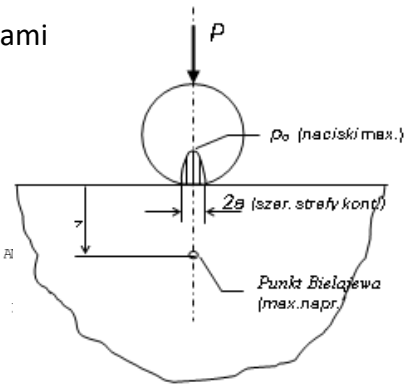
NODAL SOLUTION



NODAL SOLUTION



Przykład 6e Rolka ściskana dwoma okładzinami



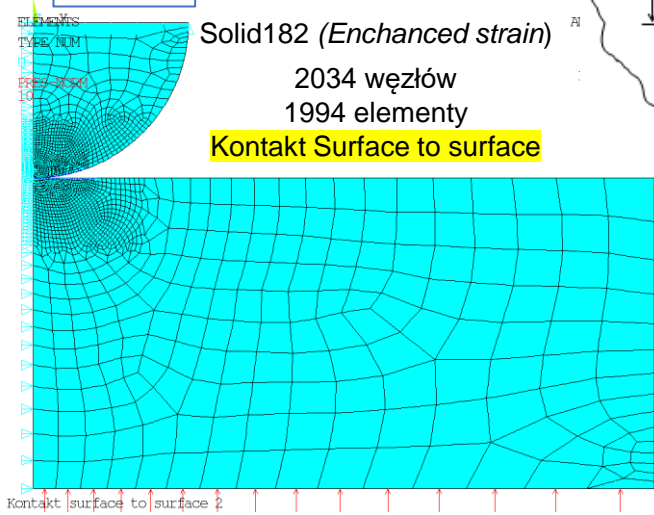
$E^* = 1,099 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, $a = 0,3044 \text{ mm}$, $p_0 = 1673 \text{ N/mm}^2$,
 $z = 0,2374 \text{ mm}$, $\tau_{max} = 502 \text{ N/mm}^2$

PSO

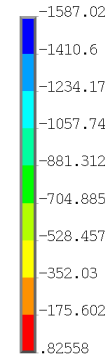
Solid182 (Enhanced strain)

2034 węzłów
1994 elementy

Kontakt Surface to surface

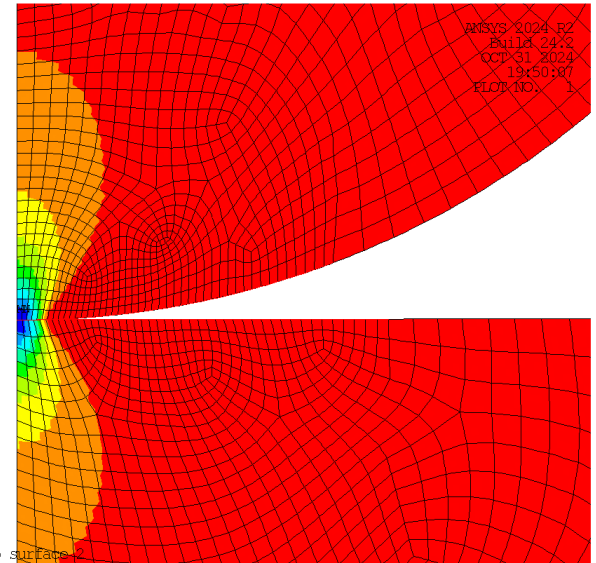


NODAL SOLUTION

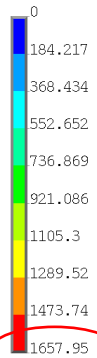


STEP=1
SUB =100
TIME=100
SY (AVG)
RSYS=0

Kontakt surface to surface 2

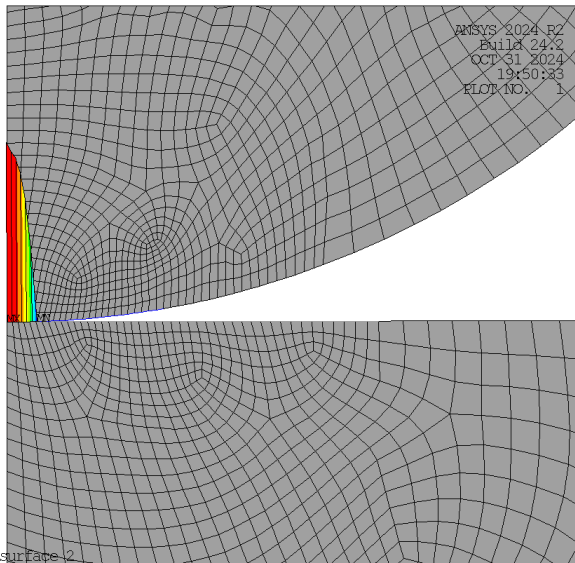


NODAL SOLUTION

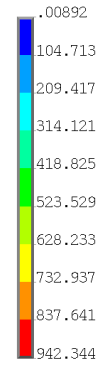


STEP=1
SUB =100
TIME=100
CONTRES (AVG)
DMX =.046541

Kontakt surface to surface 2

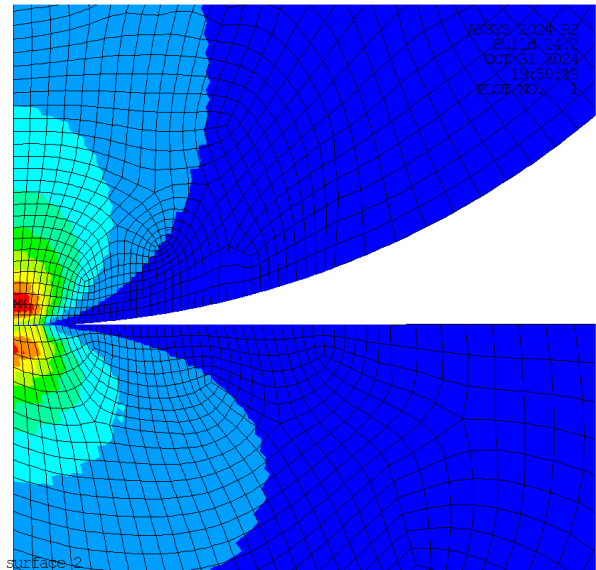


NODAL SOLUTION



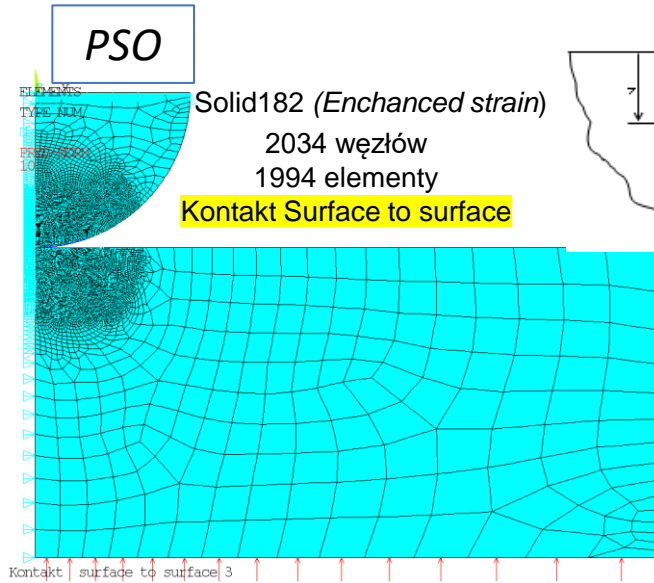
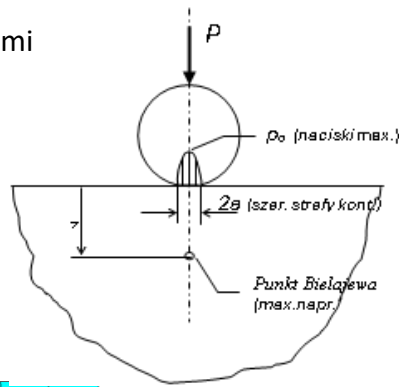
STEP=1
SUB =100
TIME=100
SEQV (AVG)
DMX =.046541

Kontakt surface to surface 2

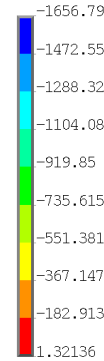


Przykład 6f Rolka ściskana dwoma okładzinami

$E^* = 1,099 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, $a = 0,3044 \text{ mm}$, $p_0 = 1673 \text{ N/mm}^2$,
 $z = 0,2374 \text{ mm}$, $\tau_{max} = 502 \text{ N/mm}^2$

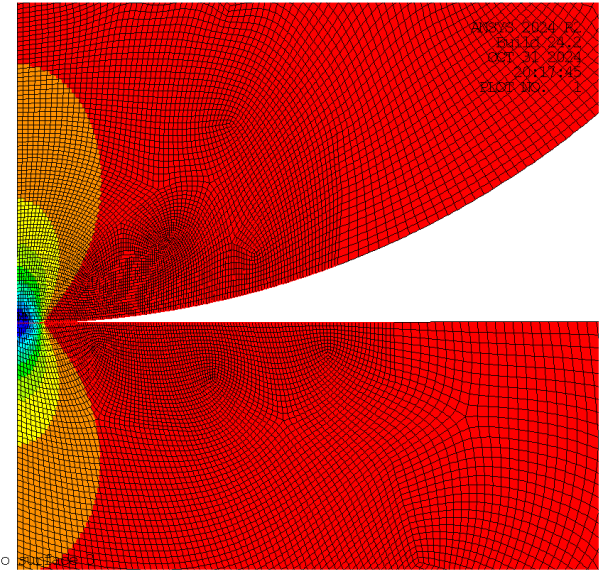


NODAL SOLUTION

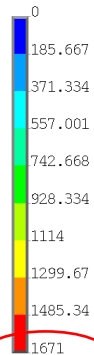


STEP=1
 SUB =100
 TIME=100
 SY (AVG)
 RSYS=0

Kontakt surface to surface 3

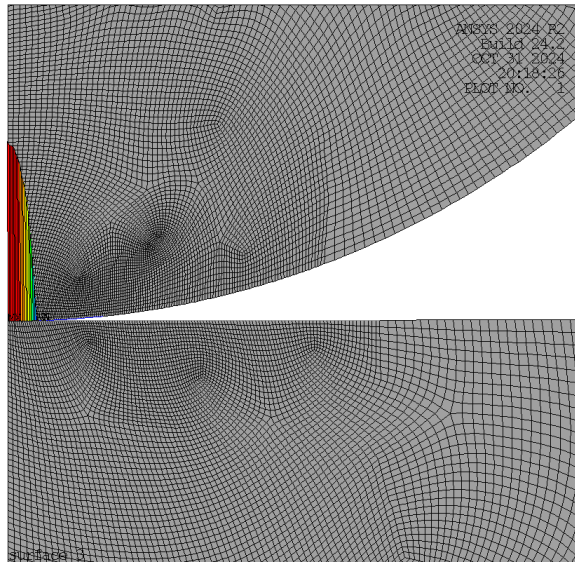


NODAL SOLUTION

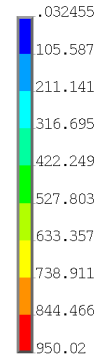


STEP=1
 SUB =100
 TIME=100
 CONTPRES (AVG)
 DMX =.046369

Kontakt surface to surface 3

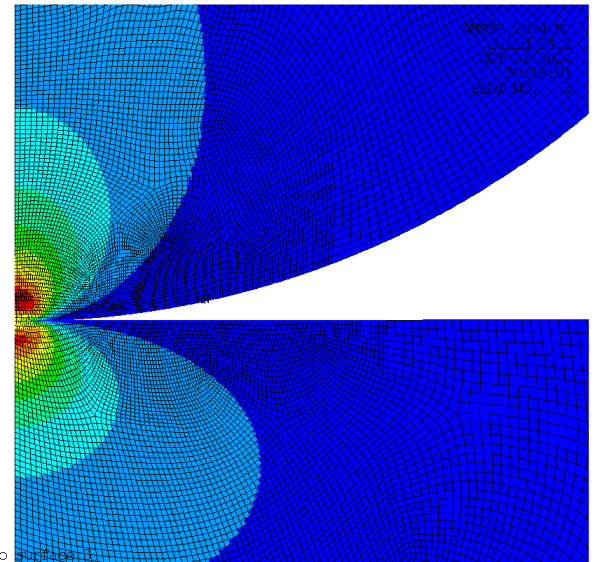


NODAL SOLUTION

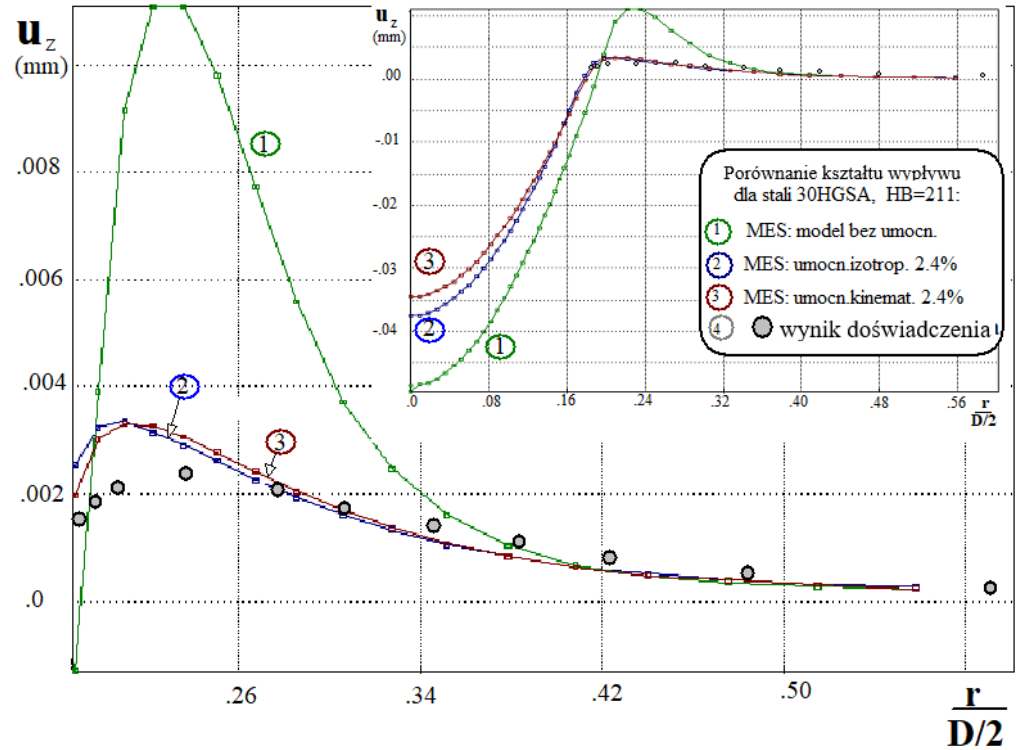
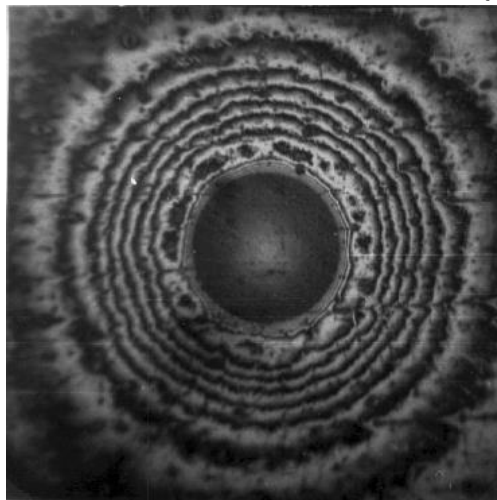
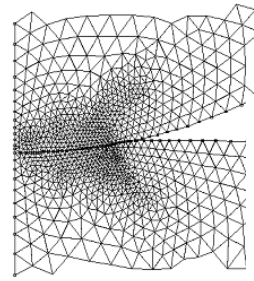
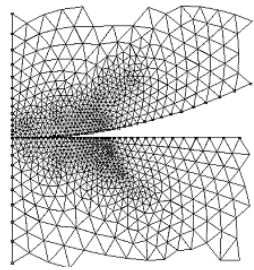
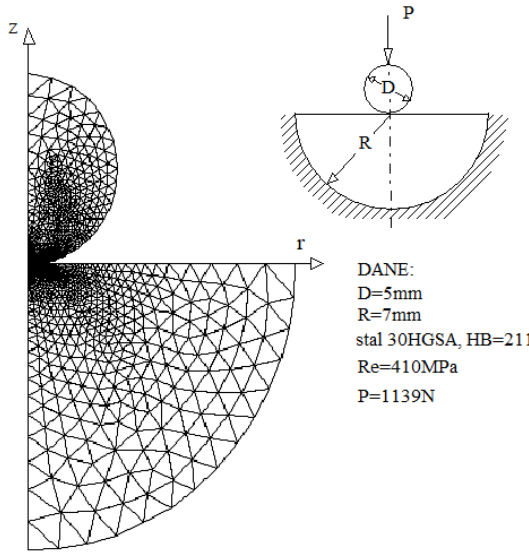


STEP=1
 SUB =100
 TIME=100
 SEQV (AVG)
 DMX =.046369

Kontakt surface to surface 3

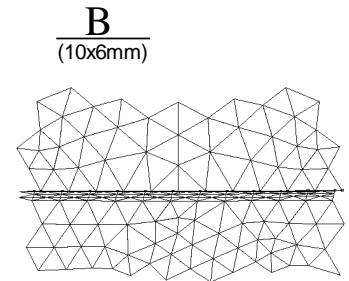
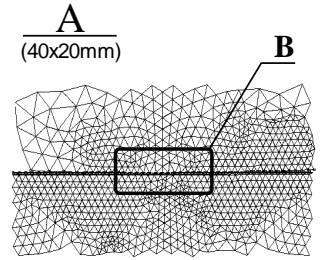
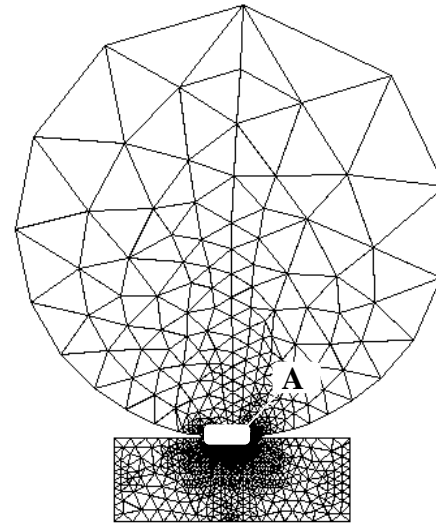
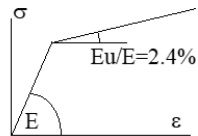
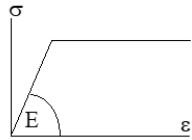
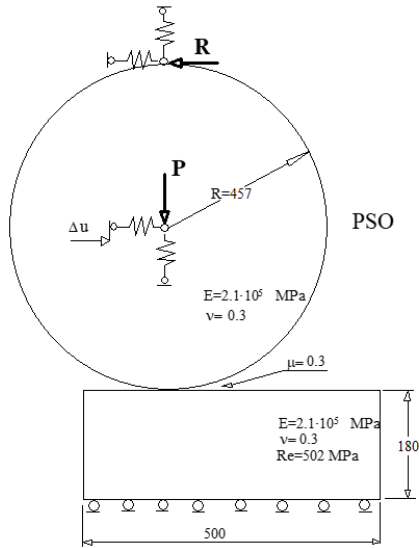


Przykład 7 Kulka wciskana w półprzestrzeń sprężysto-plastyczną (program własny1993)

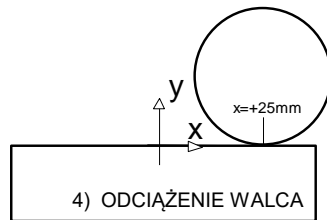
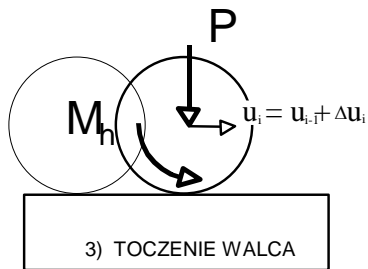
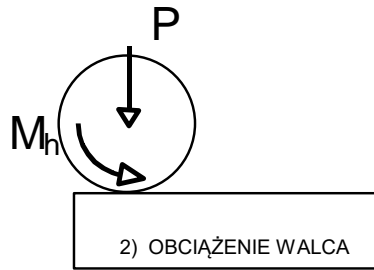
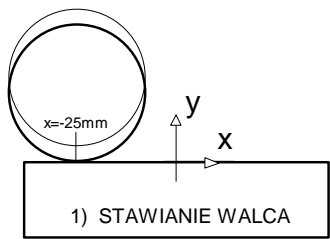


Uzyskany doświadczalnie obraz warstwiczny powierzchni wokół odcisku wykonanego w stali 30HGSA (HB=211)

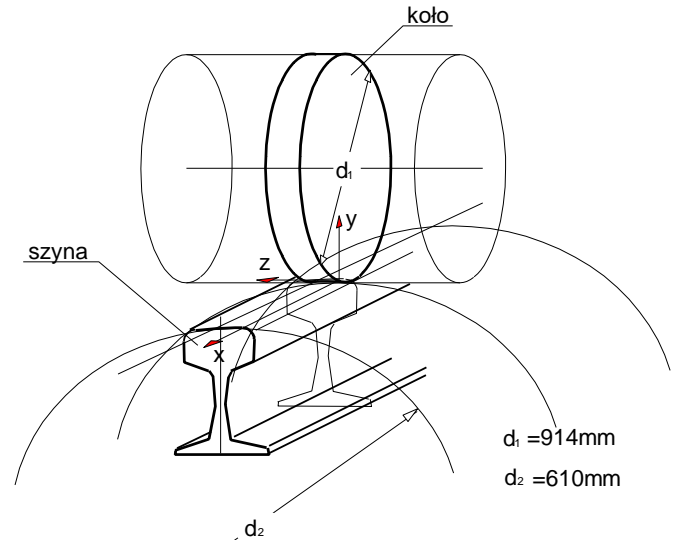
Przykład 8 Model dwuwymiarowego kontaktu walca z półprzestrzenią



Siatka elementów skończonych przyjęta do analizy numerycznej

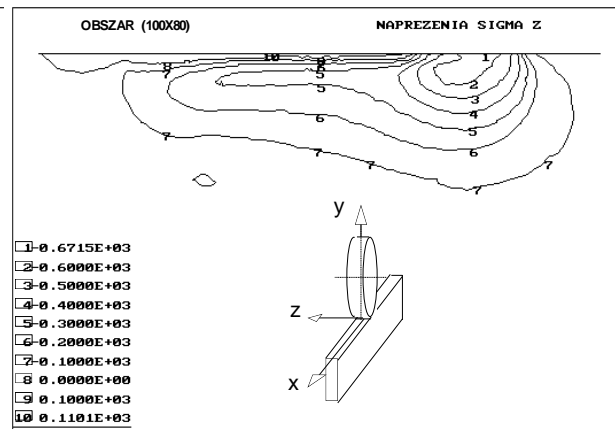
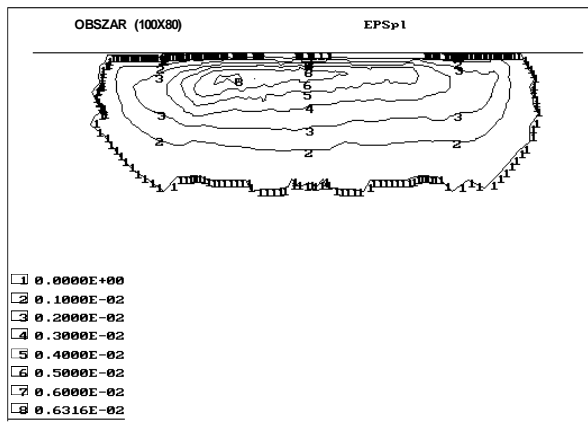


Schemat realizacji procesu toczenia

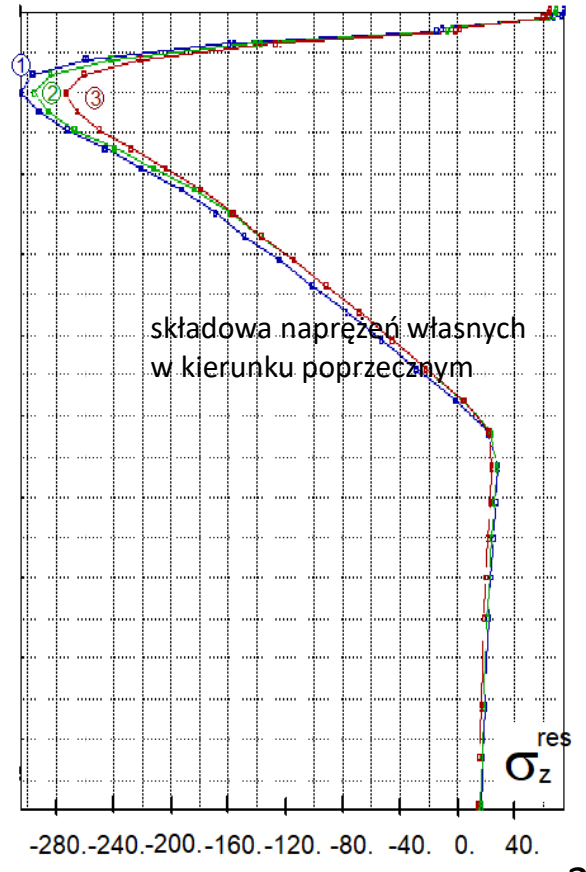
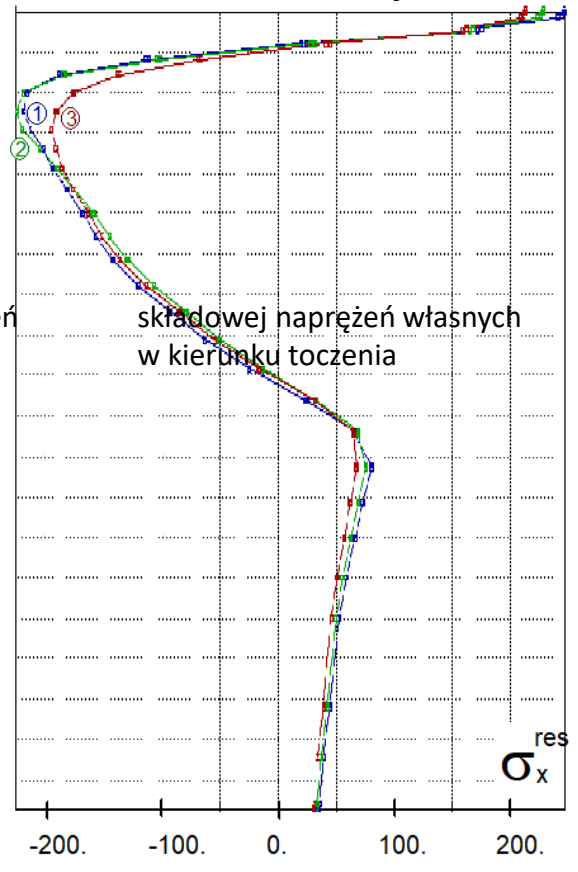
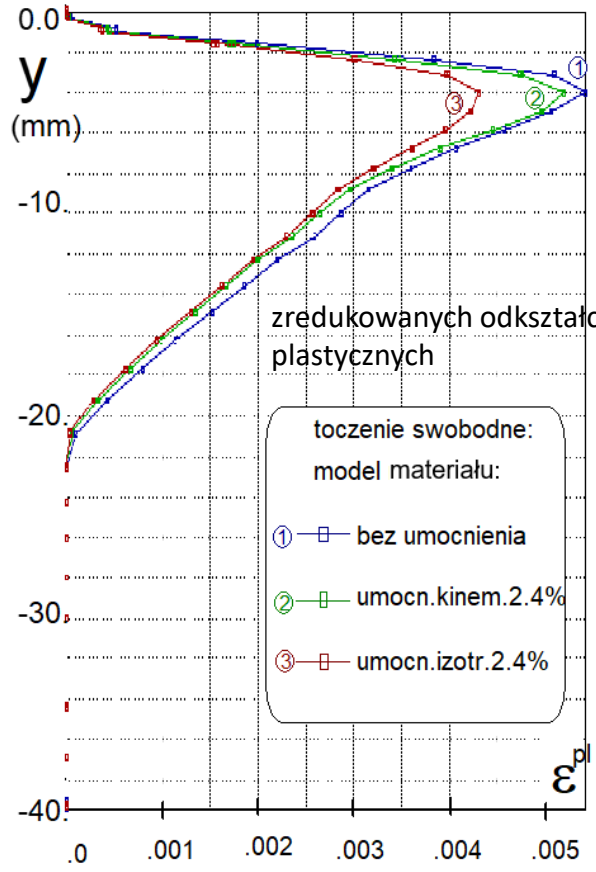


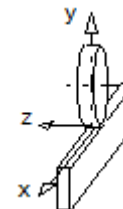
Kontakt koła z szyną jako kontakt dwóch cylindrów o osiach prostopadłych

Toczenie swobodne, stan w miejscu $x=0$; rozkłady w funkcji głębokości mierzonej od powierzchni toczenia (y) dla różnych modeli umocnienia materiału

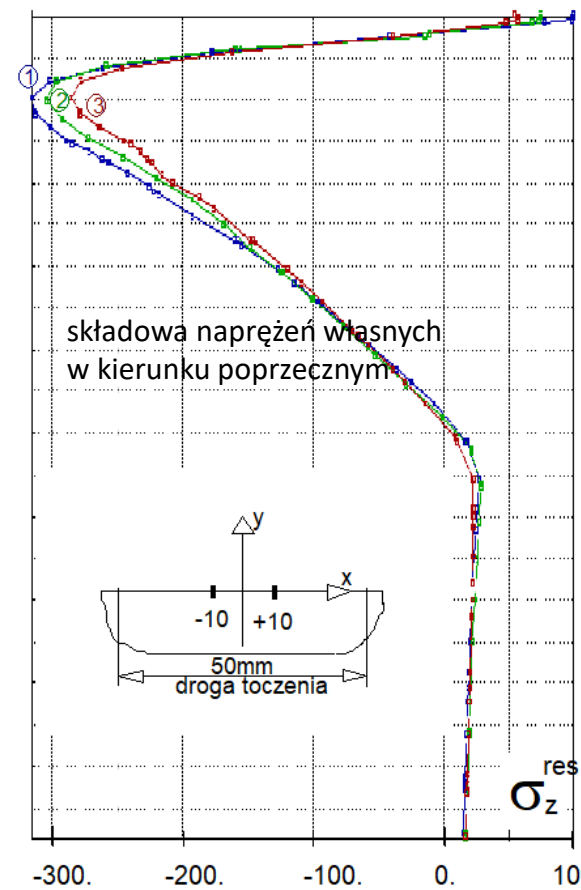
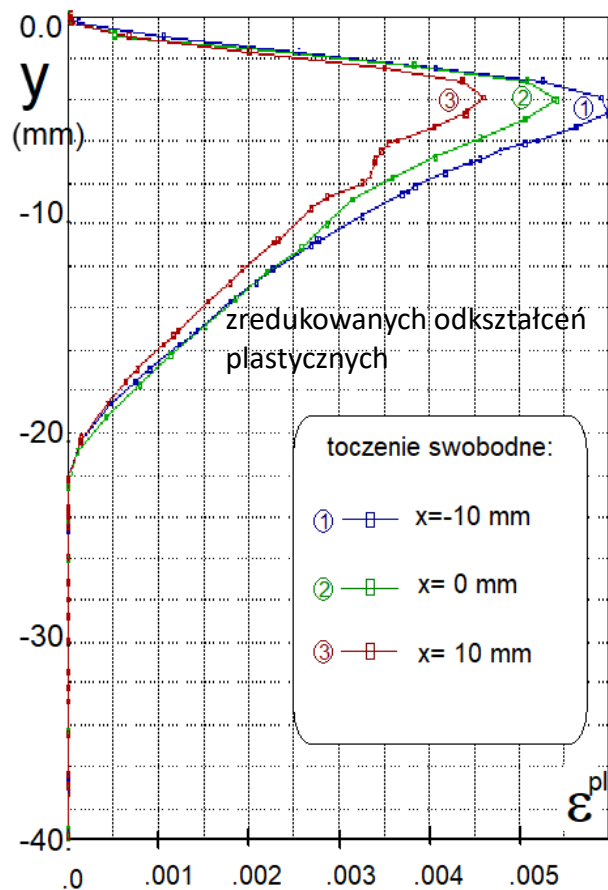


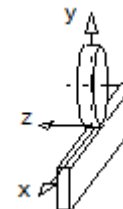
Toczenie swobodne, stan w miejscu $x=0$



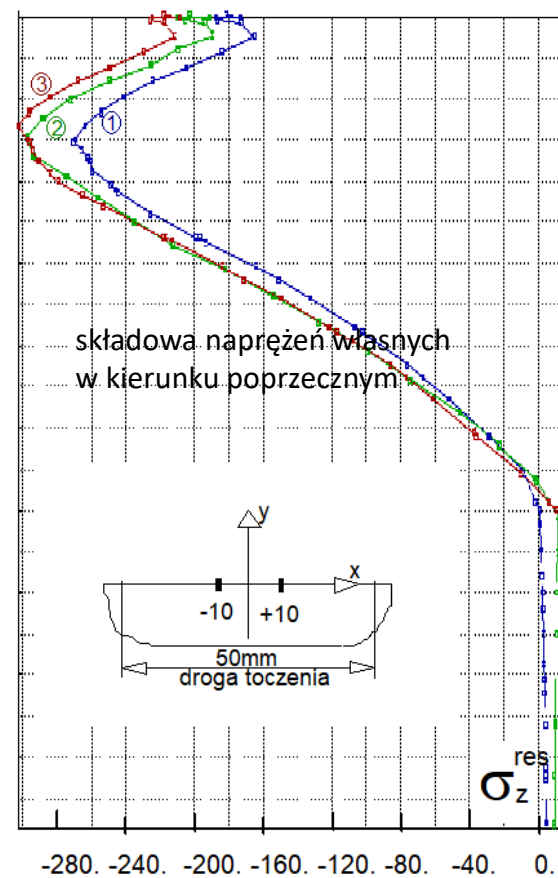
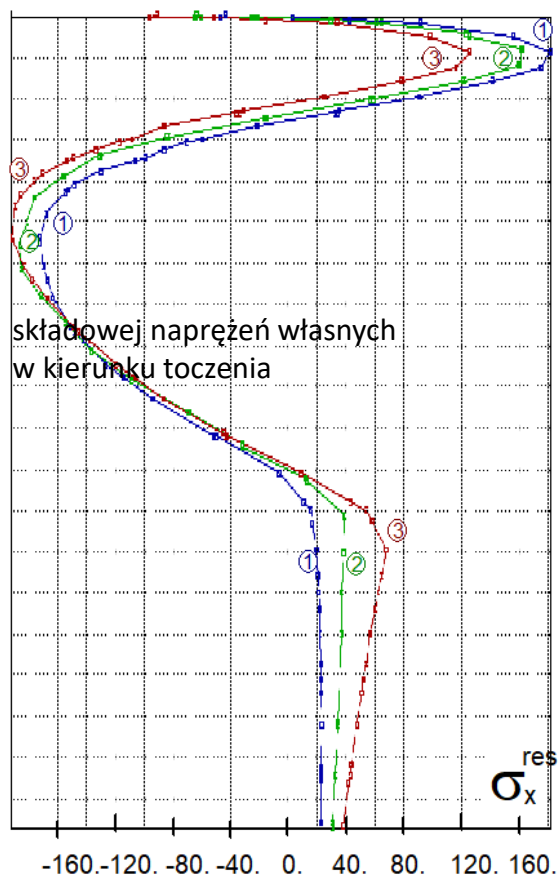
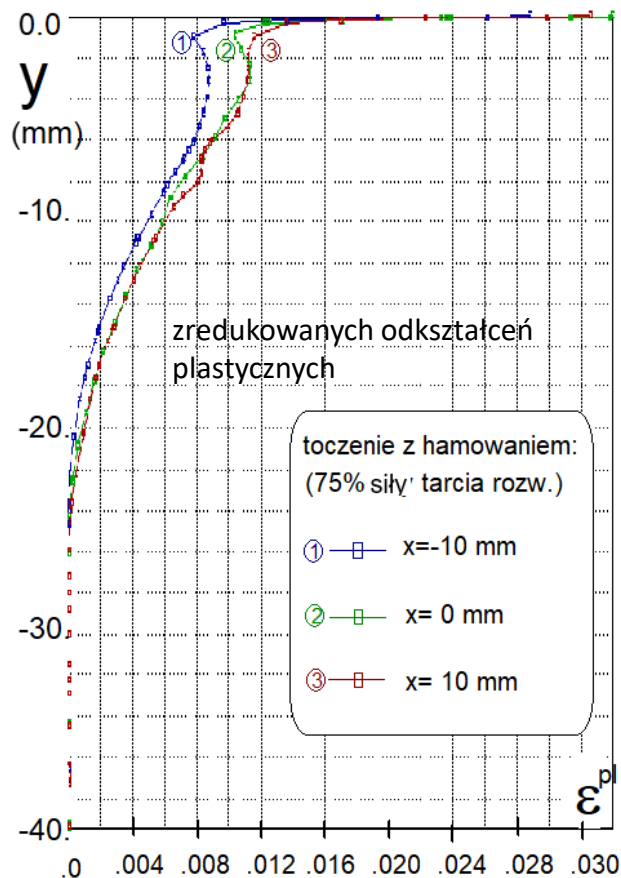


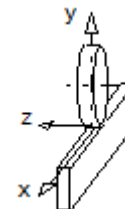
Toczenie swobodne z tarciem



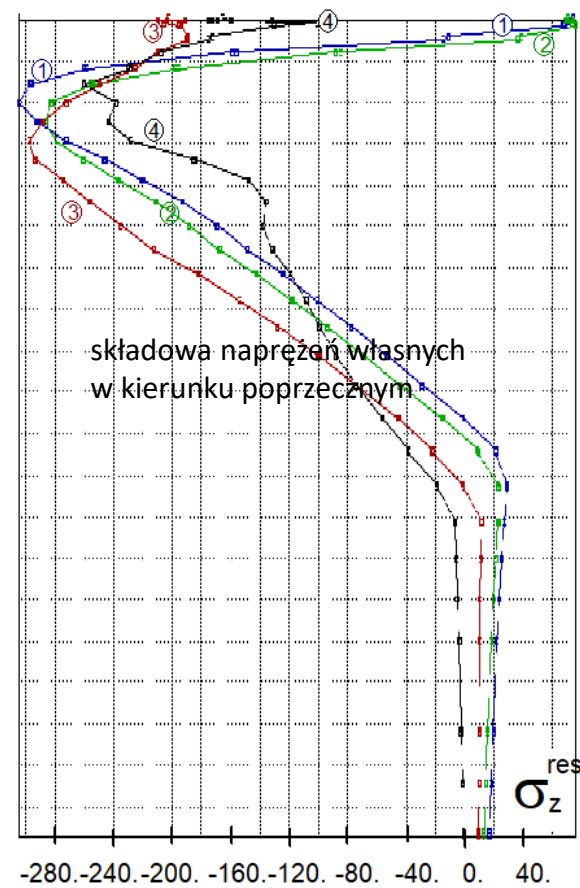
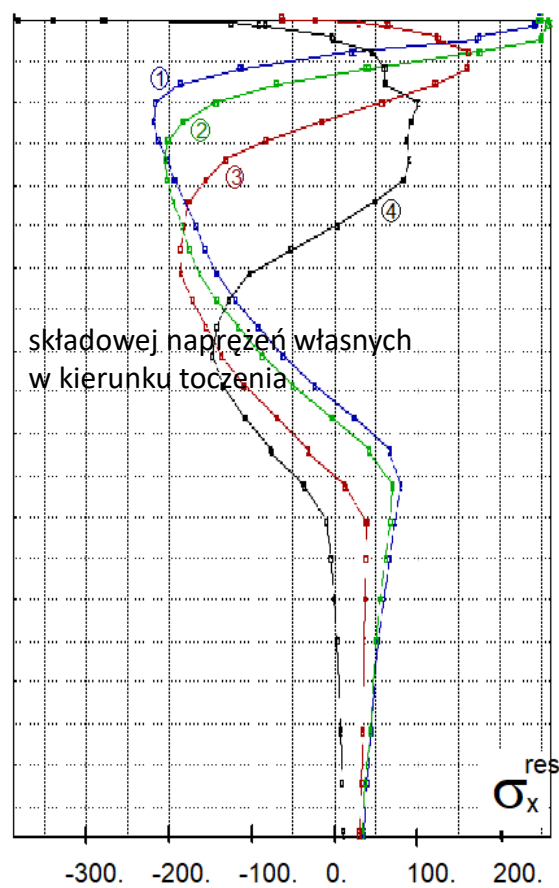
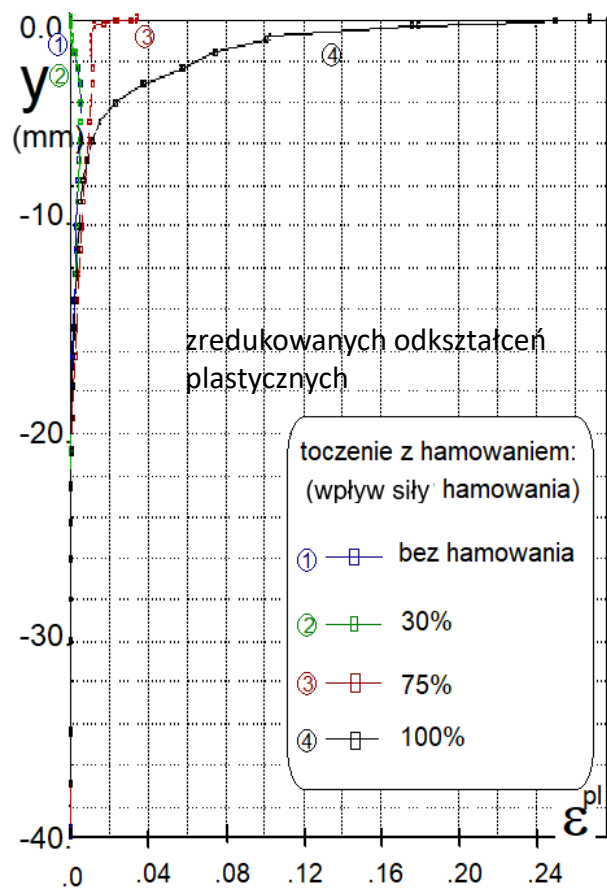


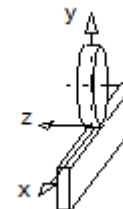
Toczenie z hamowaniem (75%)



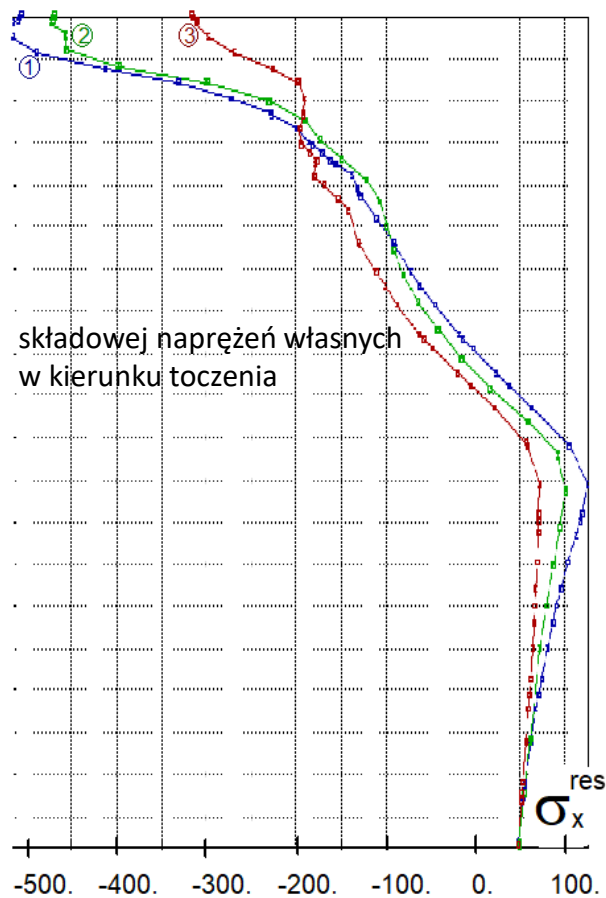
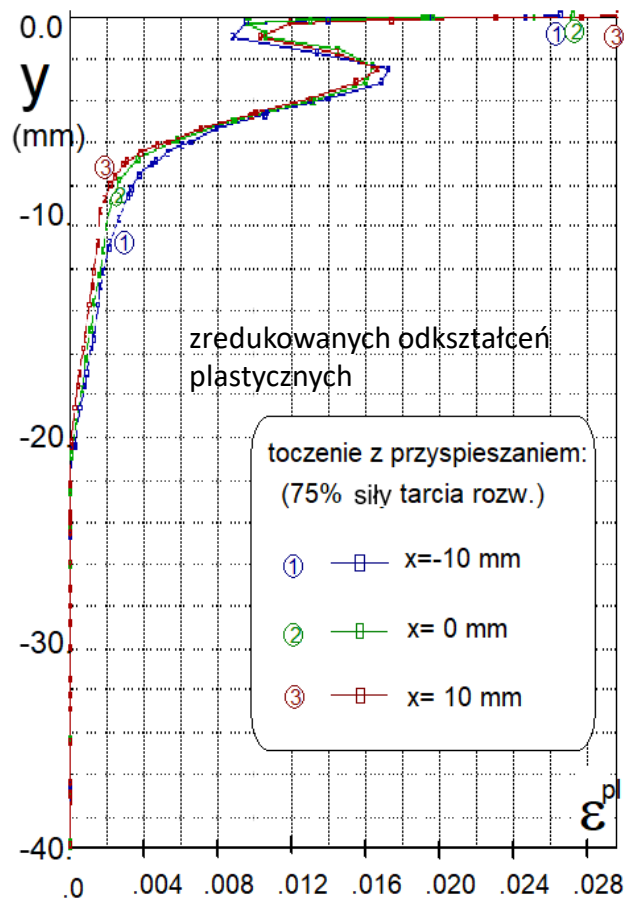


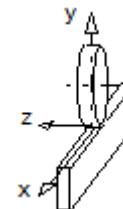
Toczenie z hamowaniem, stan w miejscu $x=0$



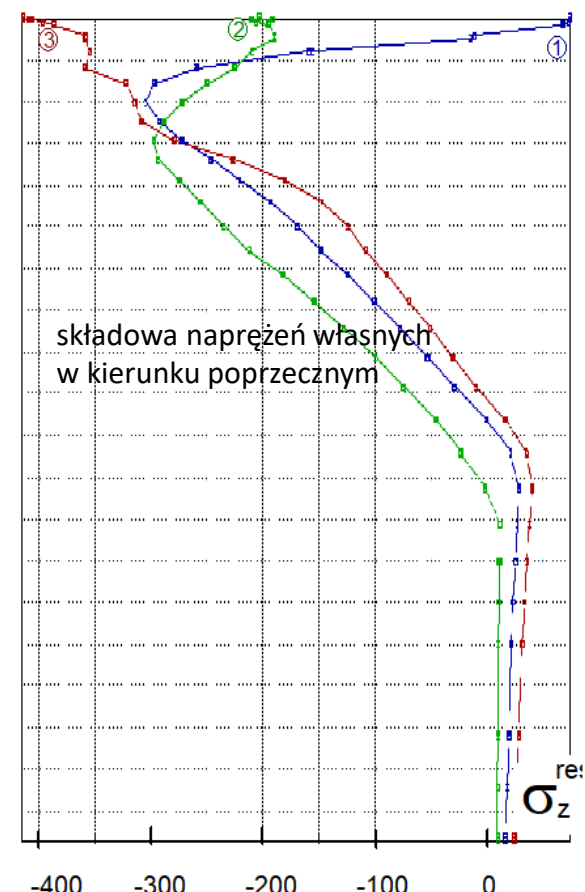
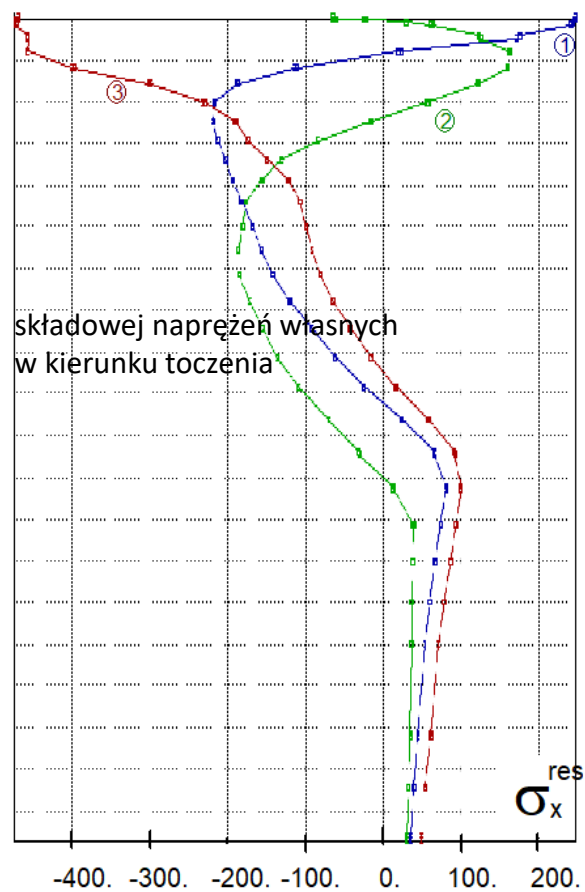
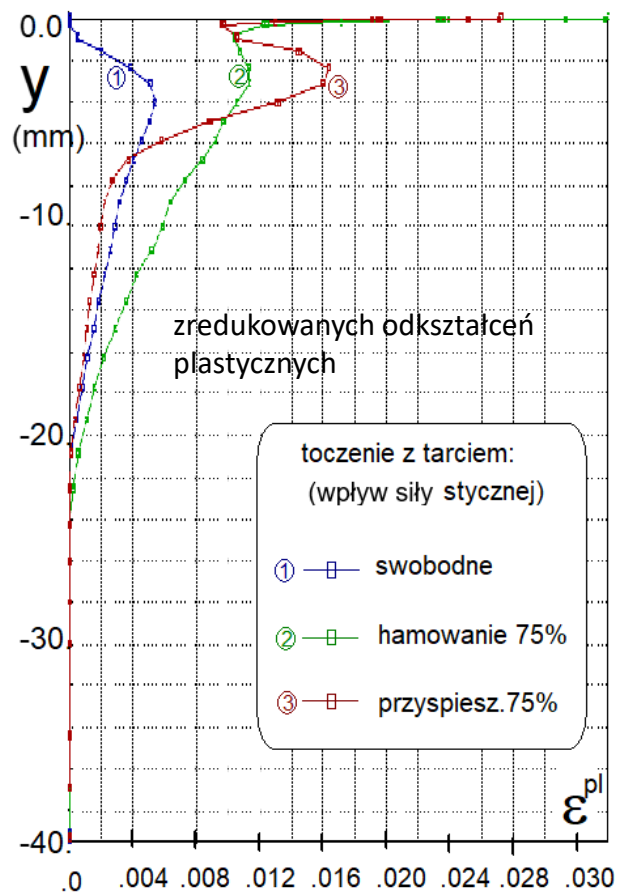


Toczenie z przyspieszaniem 75%



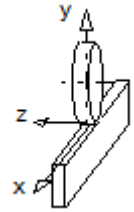


Porównanie toczenia swobodnego z hamowaniem (75%) i przyspieszaniem (75%) w miejscu $x=0$



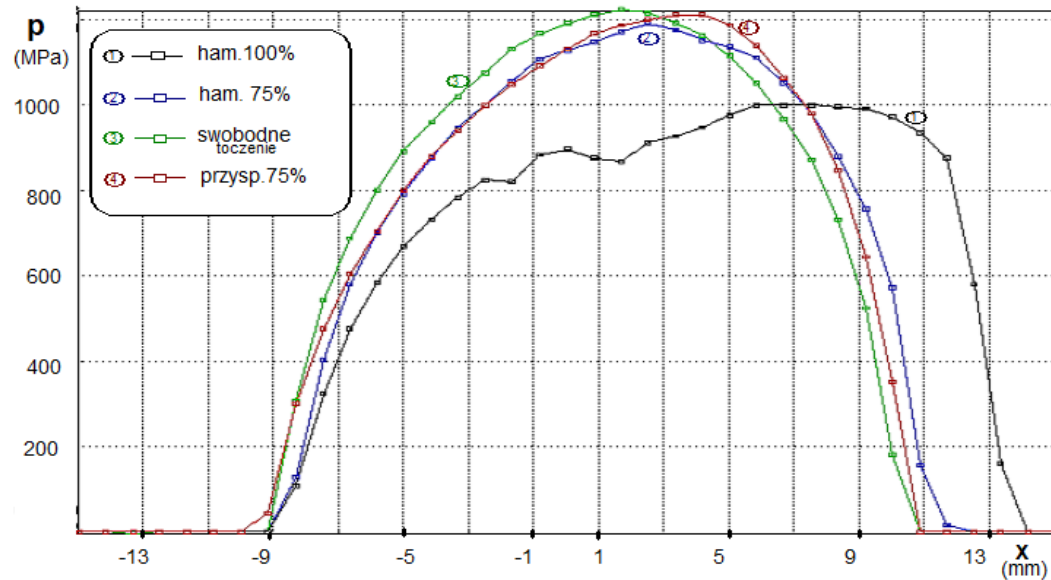
Porównanie toczenia swobodnego, z hamowaniem i przyspieszaniem

NAPRĘŻENIA WŁASNE W STATYCZNYCH I QUASISTATYCZNYCH ZAGADNIENIACH SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEGO KONTAKTU



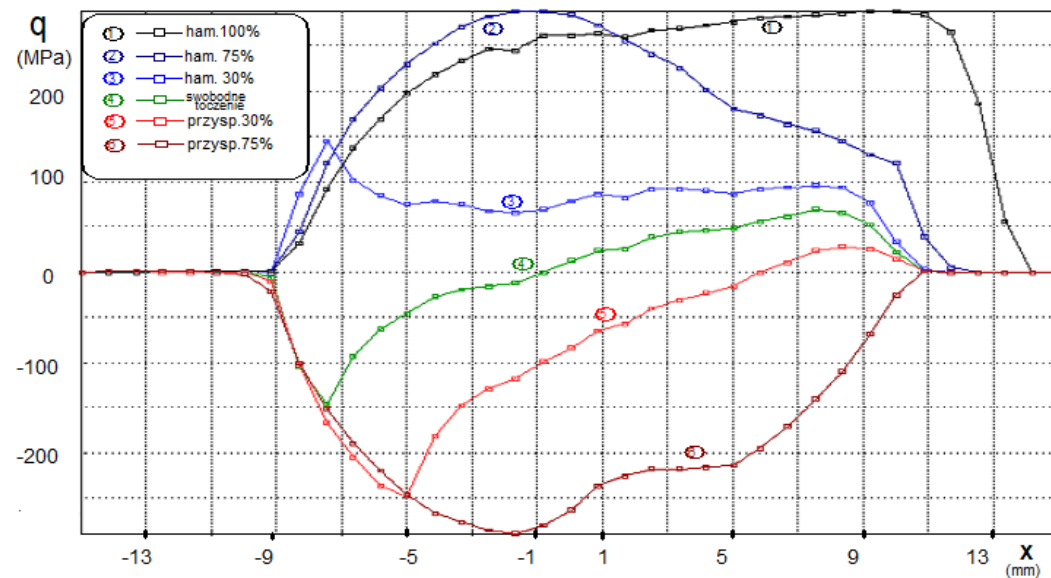
rozkłady nacisków

a)

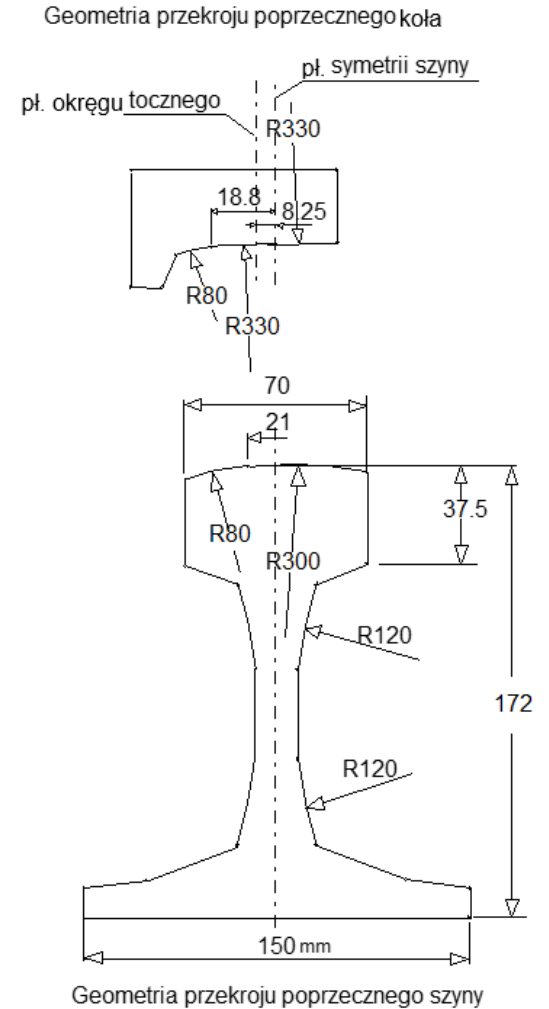
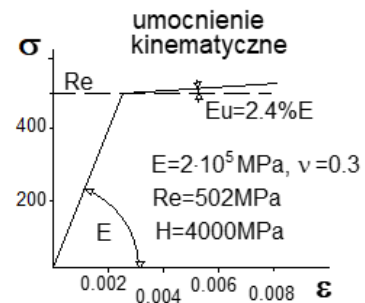
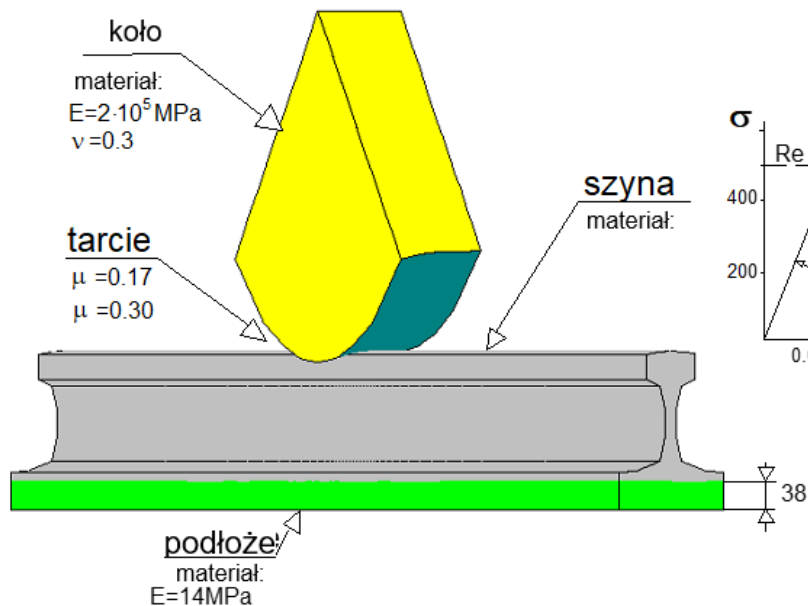
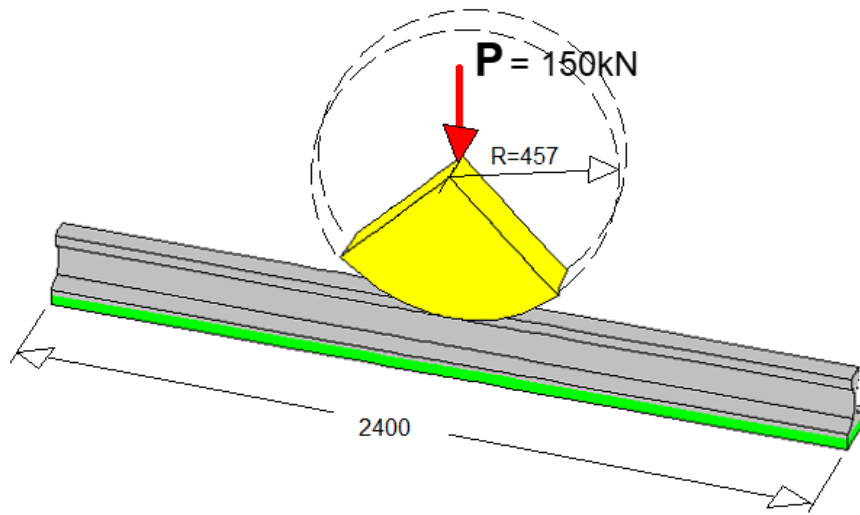


Rozkłady naprężeń stycznych

b)

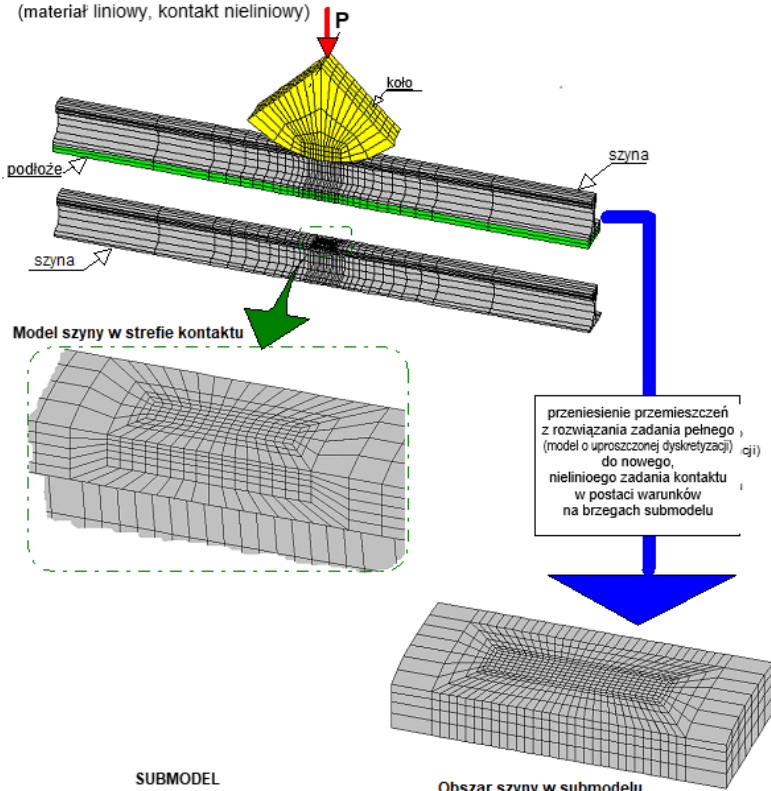


Przykład 9 Model trójwymiarowego kontaktu koła z szyną kolejową (1995)

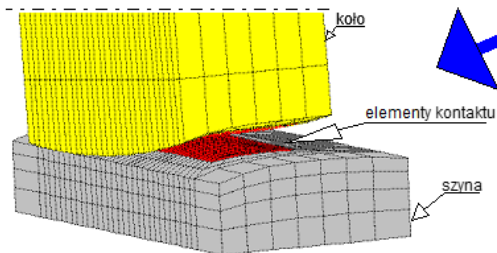


Rys.6.6. Geometria ciał i model materiału przyjęte w analizie kontaktu tocznego szyny z kołem.

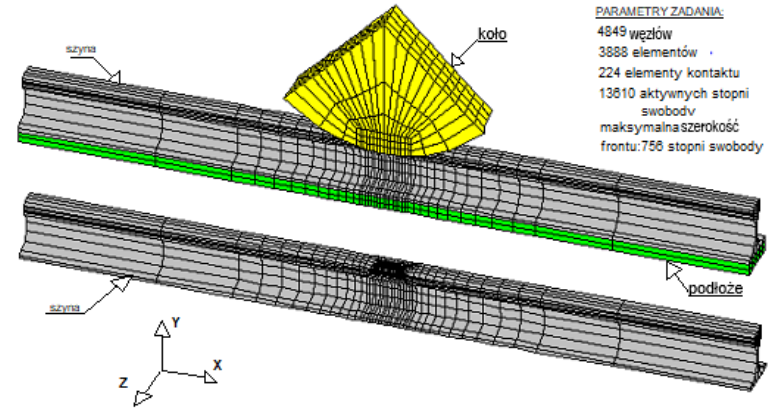
Pełny model kontaktu szyny z kołem
(materiał liniowy, kontakt nieliniowy)



SUBMODEL KONTAKTU SZYNY Z KOŁEM
(materiał szyny nieliniowy, kontakt nieliniowy z tarciem, obciążenie siłami i krokiem przemieszczenia)

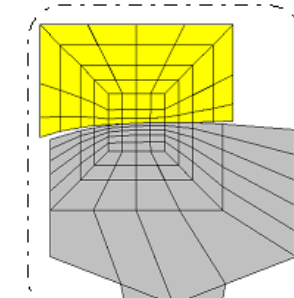
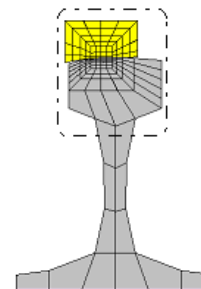
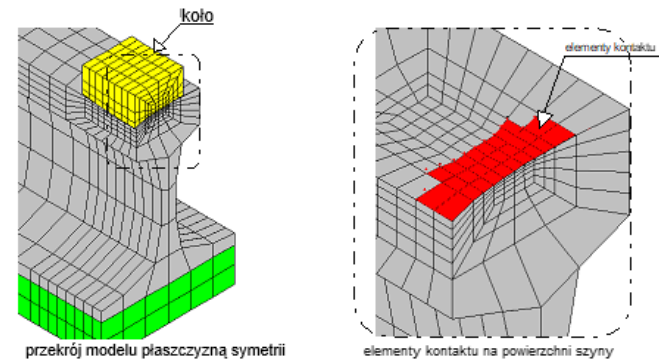


Rys. 6.7. Koncepcja submodelingu w zadaniu kontaktu tocznego szyny z kołem.

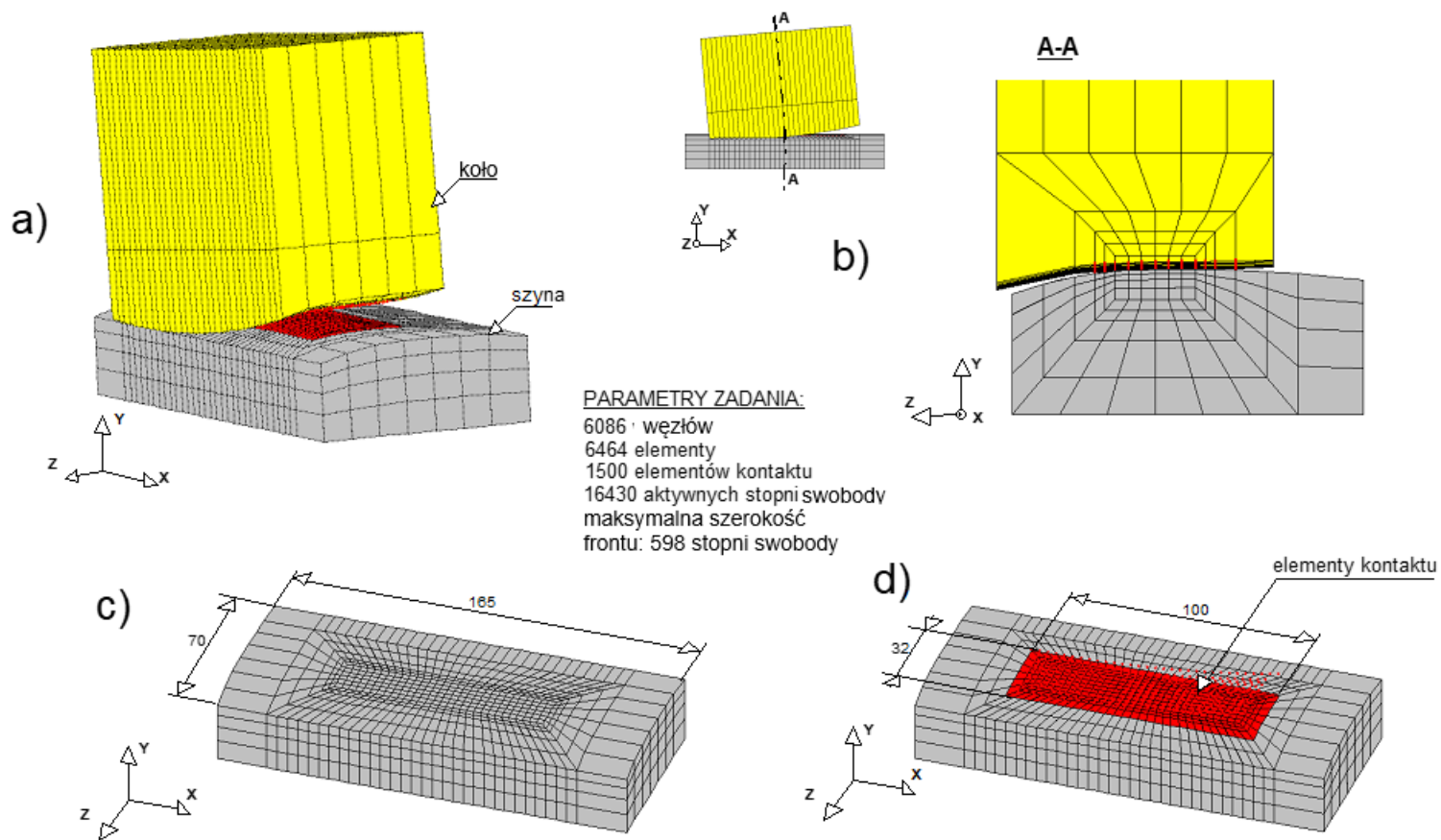


PARAMETRY ZADANIA:
4849 węzłów
3888 elementów
224 elementy kontaktu
13810 aktywnych stopni swobody
maksymalna szerokość frontu: 756 stopni swobody

Budowa strefy kontaktu

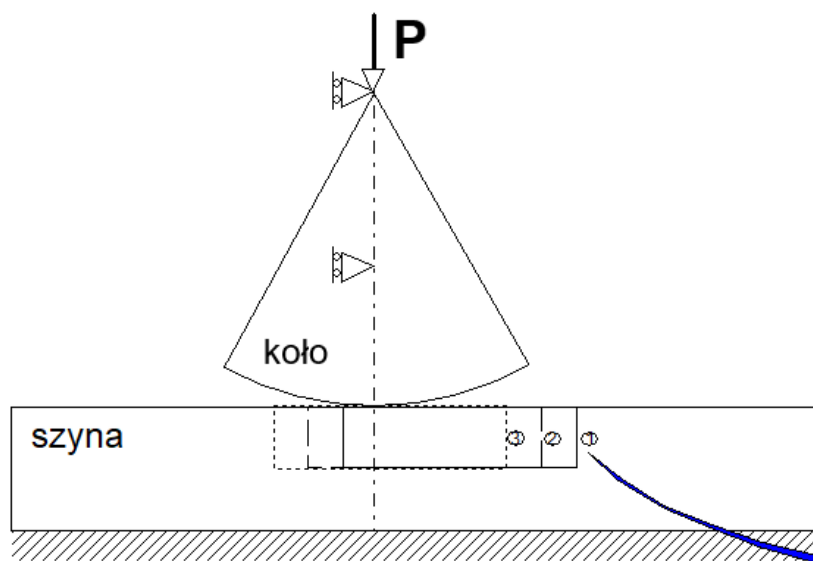


Rys.6.8. Siatka dyskretyzacyjna dla zadania pełnego kontaktu szyny z kołem.

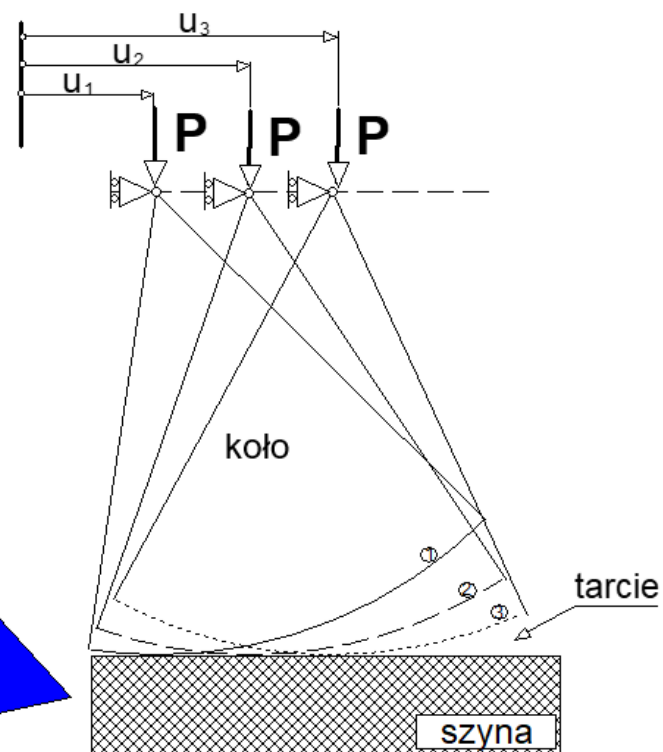


Rys.6.9. Dyskretyzacja submodelu w zadaniu kontaktu szyny z kołem;
 a) wycinek szyny objęty submodelem,
 b) przekrój submodelu płaszczyzną A-A,
 c) dyskretyzacja submodelu,
 d) dyskretyzacja strefy kontaktu z zaznaczeniem elementów kontaktu.

MODEL

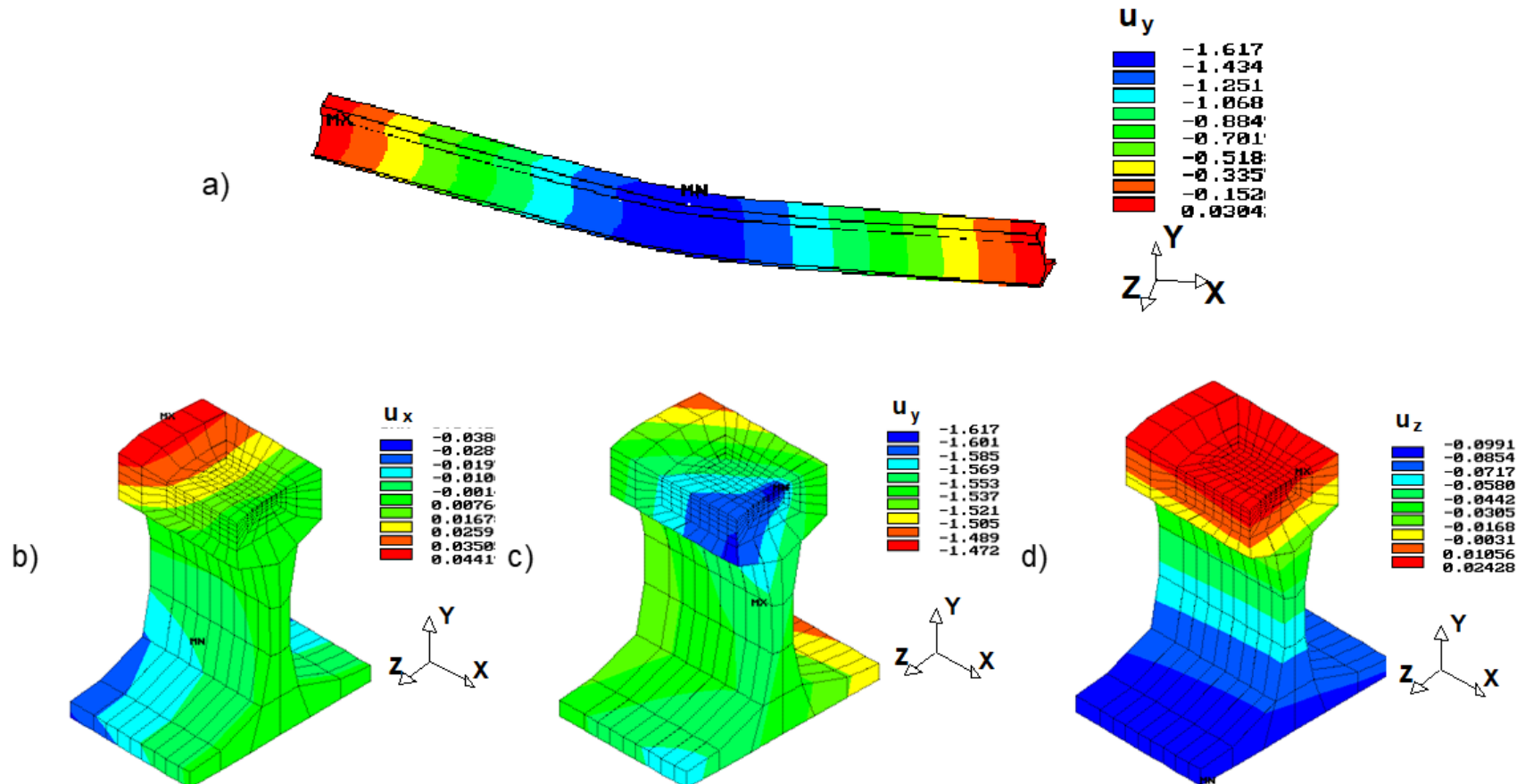


SUBMODEL

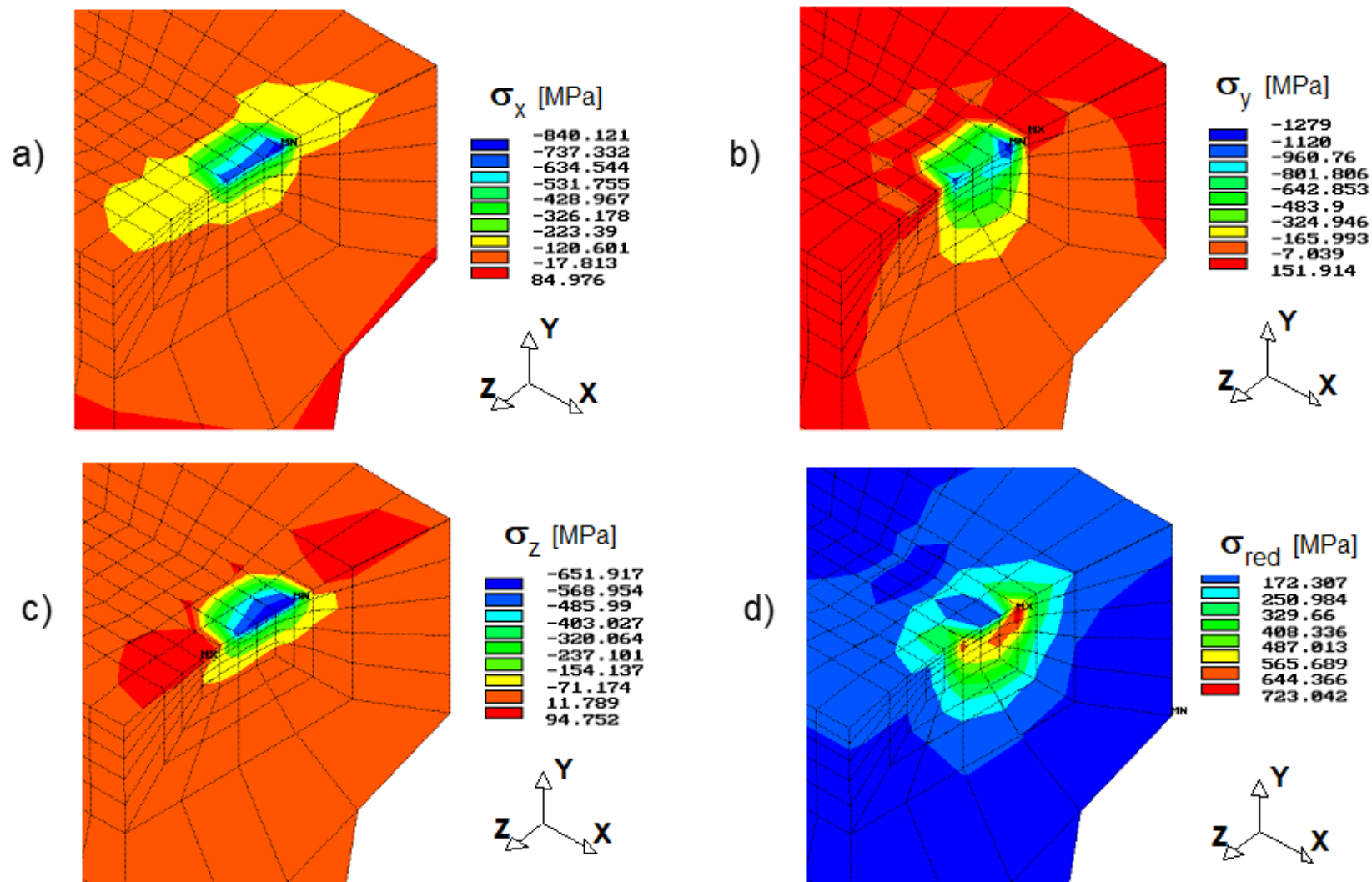


przeniesienie warunków
brzegowych w kolejnych
krokach obciążenia

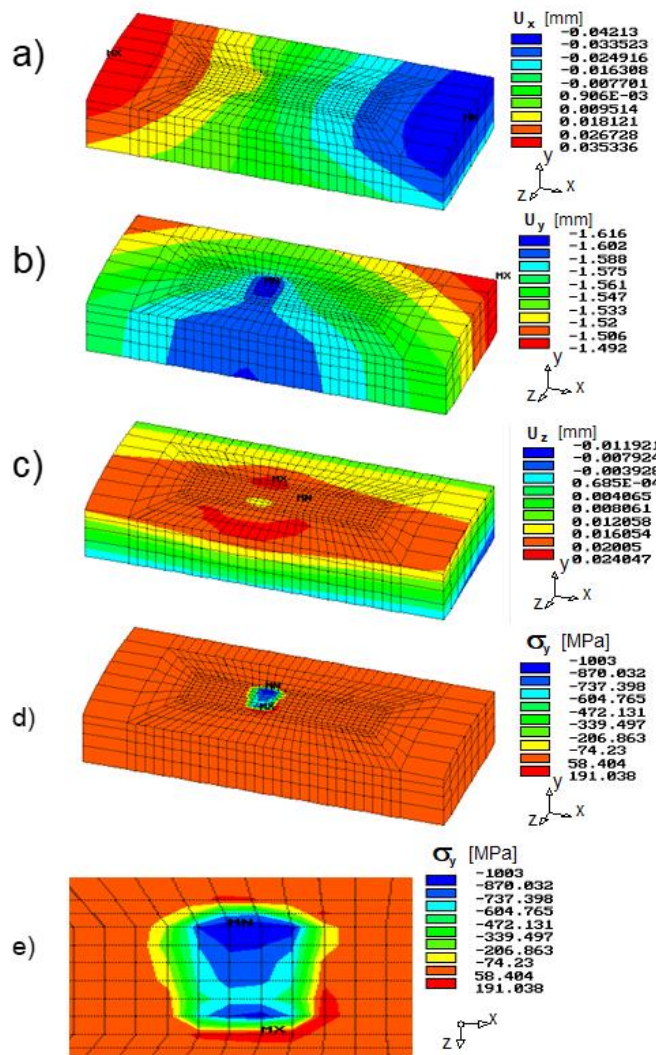
Rys.6.10. Koncepcja toczenia w zadaniu kontaktu szyny z kołem, przy wykorzystaniu modelu i submodelu.



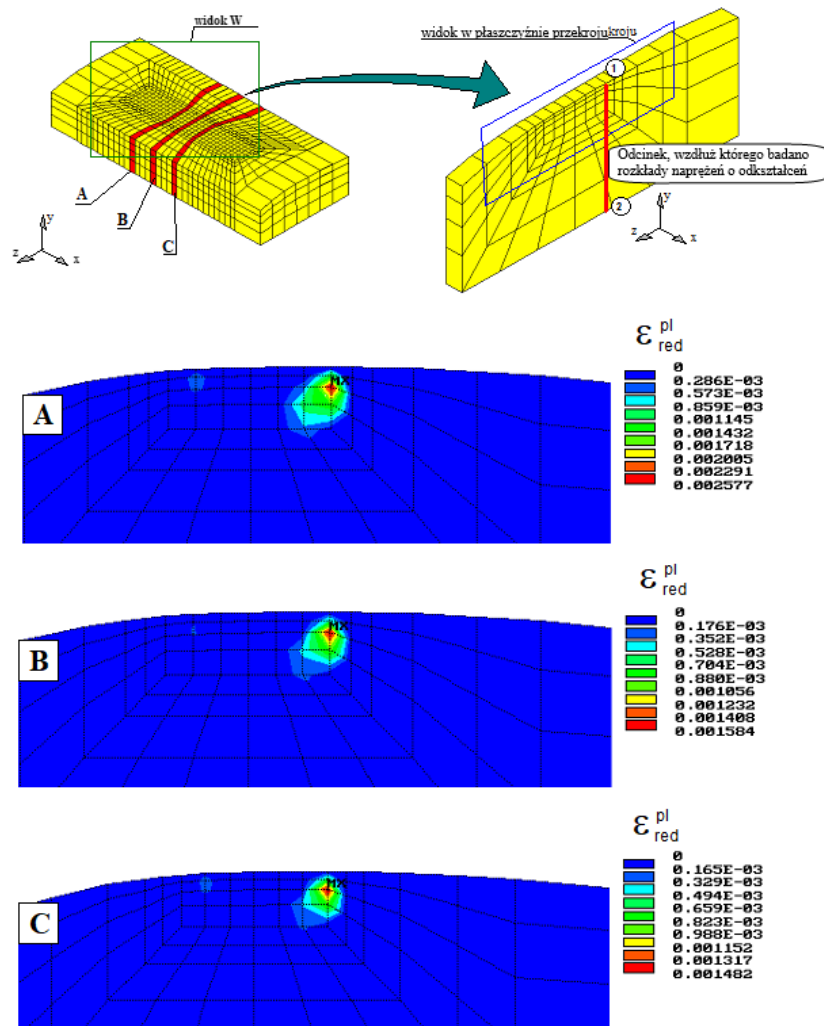
Rys.6.11. Wyniki obliczeń modelu pełnego: przebiegi składowych przemieszczenia [mm]: a) w kierunku pionowym dla całej szyny, oraz b) w kierunku wzdłużnym, c) pionowym i d) poprzecznym w strefie kontaktu.



Rys.6.12 Rozkłady składowych naprężeń normalnych: a) w kierunku wzdłużnym, b) w kierunku pionowym, c) w kierunku poprzecznym oraz d) naprężeń zredukowanych w strefie kontaktu dla modelu pełnego szyny.



Rys. 6.13. Swobodne toczenie, stan po przemieszczeniu koła o 30mm; rozkłady składowych przemieszczenia: a) U_x , b) U_y , c) U_z oraz rozkład nacisków na powierzchni toczenia submodelu d) obraz całości, e) powiększenie elementu powierzchni



Rys.6.16. Rozkłady zredukowanych odkształceń plastycznych w kolejnych przekrojach poprzecznych (A,B,C) po toczeniu swobodnym i odciążeniu.